MULTIPLIKATIONSFORMELN FÜR FOURIERKOEFFIZIENTEN VON MODULFORMEN HALBZAHLIGEN GEWICHTS

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Heinz-Gerhard Breden
aus Bremerhaven

Göttingen 1976

MULTIPLIKATIONSFORMELN FÜR FOURIERKOEFFIZIENTEN VON MODULFORMEN HALBZAHLIGEN GEWICHTS

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Heinz-Gerhard Breden
aus Bremerhaven

Göttingen 1976

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

D 7

Referent : Prof. Dr. W. Maak
Korreferent : Prof. Dr. H. S. Holdgrün
Tag der mündlichen Prüfung : 17.12.1976

Multiplikationsformeln für Fourierkoeffizienten von Modulformen halbzahligen Gewichts

Inhalt

Einleitung	S. 1
§0. Bezeichnungen und Definitionen	S. 4
§1. Multiplikationsformeln für Fourierkoeffizienten	S. 7
§2. Multiplikationsformeln für Darstellungsanzahlen	S. 16
§3. Multiplikationsformeln für Operatoren Heckescher Art	S. 28
§4. Allgemeine Multiplikationsformeln	S. 40
Literatur	S. 55

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534921_0052

Einleitung

Bei der Lösung des Problems, die Anzahl $a_l(m)$ der verschiedenen Darstellungen einer natürlichen Zahl m als Summe von l Quadraten zu bestimmen, ergibt sich in naheliegender Weise eine Verbindung zur Theorie der Modulformen, da die Darstellungsanzahlen $a_l(m)$ Fourierkoeffizienten gewisser Thetareihen sind; besondere Schwierigkeiten treten dabei für ungerades l auf, weil dann das Gewicht $-\frac{l}{2}$ der zu betrachtenden Modulformen keine ganze Zahl ist. Auch wenn man versucht, für die $a_l(m)$ Multiplikationsformeln herzuleiten von der Art, wie sie in Heckes Theorie der Eulerprodukte für die Fourierkoeffizienten einer Eigenform aller Hecke-Operatoren gelten, muß zunächst der Fall eines ungeraden l ausgeschlossen werden, da die Hecke-Operatoren nur für Modulformen ganzzahligen Gewichts definiert sind. In einer Arbeit ([2], p.919 ff.) erwähnt Hecke als Beispiel, wo es wünschenswert wäre, solche Multiplikationsformeln zu kennen, den Fall $l = 3$; die Darstellungsanzahlen $a_3(m)$ stehen nämlich in engem Zusammenhang mit den Klassenzahlen quadratischer Zahlkörper.

Später gelang es Wohlfahrt, auch für Modulformen halbzahligen Gewichts, die bei der Untersuchung der $a_l(m)$ für ungerades l auftreten, Operatoren Heckescher Art zu konstruieren ([10]) : Seien l und N natürliche Zahlen, $l \equiv 1 \bmod 2$, $N \equiv 0 \bmod 4$, und mit $\{\Gamma_0^0[N], -\frac{1}{2}, \varkappa_1\}$ werde der Raum der ganzen Modulformen vom Gewicht $-\frac{1}{2}$ zur Gruppe $\Gamma_0^0[N]$ und zum Multiplikator $\varkappa_1$ bezeichnet (s. §0); dann gibt es auf $\{\Gamma_0^0[N], -\frac{1}{2}, \varkappa_1\}$ für jede zu N teilerfremde Quadratzahl n^2 einen linearen Operator $T(n^2)$ Heckescher Art. (Daß man sich bei dieser Konstruktion auf Quadratzahlen beschränken müsse, hatte übrigens schon Hecke bemerkt : [2], p.639). Ist $f \in \{\Gamma_0^0[N], -\frac{1}{2}, \varkappa_1\}$ eine Eigenform aller $T(q^2)$, q Primzahl, mit den Fourierkoeffizienten c(m), und ist $c(1) = 1$, so gilt

$$(1) \qquad c(m^2)c(n^2) = \sum_{d \mid (m^2,n^2)} \varphi(d)c\left(\frac{m^2n^2}{d^2}\right)$$

für alle zu N teilerfremden Quadratzahlen m^2 und n^2 ([10], Satz 6); φ ist eine Funktion mit ganzzahligen Werten (s. §1, Definition 1.1). Als Anwendung erhält Wohlfahrt eine Multiplikationsformel für die Darstellungsanzahlen $a_3(m)$ ([10], p.255).

In §1 beweise ich zunächst eine Verallgemeinerung von (1) : Für die Fourierkoeffizienten einer Eigenform gilt

$$(2) \qquad c(m)c(tn^2) = \sum_{d \mid (m,n^2)} \left(\frac{t}{d}\right)\varphi(d)c\left(\frac{mn^2}{d^2}\right) \quad .$$

Hier bedeutet $\left(\frac{t}{d}\right)$ das allgemeine Restsymbol, φ ist dieselbe Funktion wie in (1), und die natürlichen Zahlen m, n und t genügen folgenden Bedingungen :

(i) $c(t) = 1 \quad , \quad (n,tN) = 1 \quad ,$

(ii) es sei k(m) der quadratfreie Kern von m (s. §0); für jede Primzahl q mit $q \mid n$ und $q \nmid k(m)$ gilt

$$\left(\frac{t}{q}\right) = \left(\frac{k(m)}{q}\right) \quad .$$

(S. Satz 1.5; dort sind auch Beispiele für Zahlen m, die Bedingung (ii) erfüllen, angegeben).

In §2 zeige ich, daß im Fall $l \in \{3, 5, 7\}$ die Modulform

$$f_l(\tau) := \sum_{m=0}^{\infty} a_l(m)\exp\left(\frac{2\pi i m\tau}{4}\right) \quad ,$$

die dem Raum $\{\Gamma_0^0[4], -\frac{l}{2}, \mathfrak{X}_l\}$ angehört, eine Eigenform aller Operatoren $T(q^2)$ zu ungeraden Primzahlen q ist; aus Satz 1.5 folgen daher Multiplikationsformeln für $a_l(m)$.

Untersucht man, nach welcher Formel sich das Produkt $T(m^2)T(n^2)$ zweier Operatoren Heckescher Art berechnet, erhält man im einfachsten nichttrivialen Fall

die Gleichung

$$(3) \qquad T(q^2)T(q^2) = T(q^4) + (1+\frac{1}{q})\varphi(q^2)T(1) \ ,$$

q Primzahl mit $q \nmid N$, φ wie in (1) (s. Lemma 3.1). Während also in (1) zu jedem gemeinsamen Teiler d von m^2 und n^2 ein Summand $\varphi(d)c(\frac{m^2n^2}{d^2})$ auftritt, fehlt in (3) ein Summand zum Teiler $q \mid (q^2,q^2)$; außerdem erscheint in (3) noch der Faktor $1+\frac{1}{q}$. Es lassen sich jedoch mit Hilfe der $T(n^2)$ neue Operatoren $\tilde{T}(n^2)$ definieren, die einer Formel nach Art von (1) genügen :

$$(4) \qquad \tilde{T}(m^2)\tilde{T}(n^2) = \sum_{d \mid (m^2,n^2)} \varphi(d)\tilde{T}(\frac{m^2n^2}{d^2}) \ ,$$

wobei $m,n \in \mathbb{N}$, $(mn,N) = 1$, und φ wie in (1) (s. Definition 3.2 und Satz 3.6). Ich benutze dann (4), um eine Multiplikationsformel für die Operatoren $T(n^2)$ zu beweisen(Satz 3.7).

Wegen (4) nennt man die Operatoren $\tilde{T}(n^2)$ φ-multiplikativ, und die Frage liegt nahe, ob es etwa noch andere Funktionen φ' gibt derart, daß die $\tilde{T}(n^2)$ ebenfalls φ'-multiplikativ sind. Dieses Problem, in einer allgemeineren Fassung, untersuche ich in §4 : Es seien $A(n^2)$, $n \in \mathbb{N}^*$, Elemente eines Ringes R, wobei $\mathbb{N}^*$ eine gewisse Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, und es gelte

$$(5) \qquad A(m^2)A(n^2) = \sum_{d \mid (m^2,n^2)} \Phi(d)A(\frac{m^2n^2}{d^2})$$

mit einer auf $\mathbb{N}^*$ erklärten Funktion Φ , deren Werte in einem auf R operierenden Ring S liegen. Unter bestimmten Voraussetzungen über die $A(n^2)$ folgt dann aus (5) :

(i) Φ ist die einzige Funktion, die Gleichung (5) erfüllt, d.h. sind die $A(n^2)$ auch Φ'-multiplikativ, so ist $\Phi = \Phi'$;

(ii) es gilt $\phi(mn) = \phi(m)\,\phi(n)$, falls $(m,n) = 1$, und für jede Primzahl q und jedes $\nu \in \mathbb{N}$ ist $\phi(q^{\nu+2}) = \phi(q^{\nu})\,\phi(q^2)$

(s. Folgerung 4.5) . Für die zuvor betrachteten Operatoren $\tilde{T}(n^2)$ sind diese Voraussetzungen erfüllt in den Fällen $N = 4$ und $l \in \{5, 7\}$, jedoch nicht im Fall $N = 4$ und $l = 3$ (Beispiele 4.7 und 4.8) .

Die obigen Aussagen (i) und (ii) ähneln denjenigen, die Rankin in einer Arbeit über die Multiplikationsformeln der Hecke-Operatoren erhielt ([7], Theorem 4) ; am letztgenannten Beispiel ($N = 4$, $l = 3$) werden aber auch die Unterschiede zu Rankins Resultaten deutlich (s. Beispiele 4.8, 4.9 und 4.10) .

Eine entsprechende Untersuchung wie für Formel (5) führe ich in §4 noch für die Formel (2) und wende das Ergebnis an auf die in §2 bewiesenen Multiplikationsformeln für die Darstellungsanzahlen $a_l(m)$ (s. Satz 4.12 und Folgerung 4.13) .

§0. Bezeichnungen und Definitionen

Mit $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ bezeichne ich wie üblich die Menge der natürlichen Zahlen, den Ring der ganzen Zahlen, den Körper der reellen Zahlen bzw. den Körper der komplexen Zahlen; ferner ist $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sind m und n natürliche Zahlen, und ist n durch m teilbar bzw. nicht teilbar, wird dies mit $m \mid n$ bzw. $m \nmid n$ bezeichnet; falls jeder Primfaktor von m auch n teilt, so schreibe ich $m \mid n^{\infty}$. Der größte gemeinsame Teiler zweier ganzer Zahlen m und n wird mit (m,n) bezeichnet.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mu(n)$ der Wert der Möbiusfunktion, und $k(n)$ ist der quadratfreie Kern von n , d.h. $k(n) \in \mathbb{N}$, $k(n) \mid n$, und $\frac{n}{k(n)}$ ist die größte Quadratzahl, die n teilt.

Eine Abbildung f , die auf einer multiplikativ ab-

geschlossenen Teilmenge $\mathbb{N}^*$ von $\mathbb{N}$ definiert ist und deren Werte in einem Ring liegen, heißt multiplikativ, falls für $m, n \in \mathbb{N}^*$ mit $(m,n) = 1$ gilt

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad ; \tag{6}$$

f heißt vollständig multiplikativ, falls (6) für alle $m, n \in \mathbb{N}^*$ gilt. Z.B. sind μ und k multiplikative Funktionen.

Für $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ mit $b \equiv 1 \bmod 2$ ist $(\frac{a}{b})$ das verallgemeinerte Restsymbol; es stimmt mit dem Legendre-Symbol überein, falls b eine Primzahl ist, und für beliebiges b gilt

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \begin{cases} 0 & (a,b) > 1 \\ 1 & b = 1 \\ \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{a}{p_\nu}\right) & (a,b) = 1 \text{, } b = \prod_{\nu=1}^{n} p_\nu \text{, wobei } p_1, \ldots, p_n \end{cases}$$

(nicht notwendig verschiedene) Primzahlen sind.

Für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \equiv 1 \bmod 2$ definiere ich

$$\left(\frac{a}{b}\right)_* := \begin{cases} \left(\frac{a}{|b|}\right) & a \geq 0 \text{ oder } b > 0 \\ -\left(\frac{a}{|b|}\right) & a < 0 \text{ und } b < 0 \end{cases} .$$

Mit Γ wird die Modulgruppe bezeichnet, also

$$\Gamma = \{ L \in \mathbb{Z}^{2\times 2} \mid \det L = 1 \} \quad ;$$

für $N \in \mathbb{N}$ definiert man folgende Untergruppen von Γ :

$$\Gamma(N) := \{ L \in \Gamma \mid L \equiv E^{(2)} \bmod N \} ,$$

$$\Gamma[N] := \Gamma(N) \cup (-E^{(2)}) \cdot \Gamma(N) ,$$

$$\Gamma_0^0[N] := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid b \equiv c \equiv 0 \bmod N \right\} ,$$

wobei für $n \in \mathbb{N}$ mit $E^{(n)}$ die n-reihige Einheitsmatrix bezeichnet wird. Es gilt

$$\Gamma \supset \Gamma_0^0[N] \supset \Gamma[N] \supset \Gamma(N) .$$

Sei $K \subset \{ L \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det L = 1 \}$ eine eigentlich diskontinuierliche Grenzkreisgruppe mit $-E^{(2)} \in K$; ferner seien $r \in \mathbb{R}$ und $v : K \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Multiplikator für K und r (s. [5]) . Dann bezeichnet $\{ K, r, v \}$ den $\mathbb{C}$ -Vektorraum der ganzen Modulformen vom Gewicht r zur Gruppe K und zum Multiplikator v (s. [4], [5]). Ein $f \in \{ K, r, v \}$ ist eine in der oberen komplexen Halbebene definierte holomorphe Funktion, die bei Annäherung an die reelle Achse gewissen Regularitätsbedingungen genügt, und die sich folgendermaßen transformiert :

$$(f|L)(\tau) := (c\tau+d)^{r} f(L\tau) = v(L) f(\tau) \quad , \quad L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K .$$

Dabei ist im Fall $c = 0$

$$d^{r} := |d|^{r} \exp(-\pi i r \frac{\operatorname{sgn}(d)-1}{2}) \quad , \quad \operatorname{sgn}(d) = \frac{d}{|d|} ,$$

und im Fall $c \neq 0$

$$(c\tau+d)^{r} := \exp(r \log(c\tau+d)) .$$

Hier bezeichnet exp die Exponentialfunktion, und es ist derjenige Zweig des Logarithmus zu wählen, für den $\log x$ reell ist, falls $x > 0$; τ steht immer für eine komplexe Zahl mit positivem Imaginärteil.

Seien $l, N \in \mathbb{N}$ mit $l \equiv 1 \bmod 2$ und $N \equiv 0 \bmod 4$; für $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^0[N]$ sei

$$\varkappa_1(L) := \begin{cases} (\frac{c}{d})_* & L \equiv E^{(2)} \bmod 4 \\ i(-1)^{(l+1)/2} (\frac{c}{d})_* & L \equiv -E^{(2)} \bmod 4 . \end{cases}$$

$\varkappa_1$ ist ein Multiplikator für $\Gamma_0^0[N]$ und $-\frac{l}{2}$ (folgt aus [4]) . Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $(n,N) = 1$ definiert Wohlfahrt auf dem Raum $\mathcal{K} := \{ \Gamma_0^0[N] , -\frac{l}{2} , \varkappa_1 \}$ einen Operator $T(n^2)$ Heckescher Art : Es sei

$$R_n := \{ \begin{pmatrix} a & bN \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a,d \in \mathbb{N}, ad = n^2 ; b \bmod d ; a,b,d \text{ teilerfremd} \}$$

("b mod d" bedeutet, daß b ein vollständiges Restsystem modulo d durchläuft), ferner sei für $L = \begin{pmatrix} a & bN \\ 0 & d \end{pmatrix} \in R_n$ und $t := (a,d)$

$$\sigma(L) := \begin{cases} (\frac{bN}{t}) & t \equiv 1 \bmod 4 \\ i(-1)^{(l+1)/2} (\frac{bN}{t}) & t \equiv -1 \bmod 4 \end{cases} ;$$

dann ist $T(n^2) : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ erklärt durch

$$T(n^2)f := n^{l-2} \sum_{L \in R_n} \sigma(L) f|L \quad , \quad f \in \mathcal{K} \quad .$$

(S. [10] ; zur Konstruktion von Operatoren Heckescher Art siehe auch [9]).

§1. Multiplikationsformeln für Fourierkoeffizienten

Es seien l und N zwei feste natürliche Zahlen mit $l \equiv 1 \bmod 2$ und $N \equiv 0 \bmod 4$.

In diesem Paragraphen betrachte ich eine Modulform $f \in \{ \Gamma_0^0[N] , -\frac{l}{2} , \varkappa_1 \}$, die Eigenform der Operatoren $T(q^2)$ ist, q Primzahl mit $q \nmid N$. Für die Fourierkoeffizienten von f leite ich eine Multiplikationsformel her, die ein Ergebnis von Wohlfahrt verallgemeinert (s. Satz 1.5 und [10] , Satz 6).

Zunächst untersuche ich einige Funktionen, die im Folgenden benötigt werden.

Definition 1.1. Seien $a \in \mathbb{N}$ und $\lambda := \frac{l-1}{2}$. Auf den zu N teilerfremden natürlichen Zahlen definiere ich Funktionen ψ und φ_a durch

$$\psi(m) := \mu(k(m))(\frac{-1}{m})^{\lambda} (\frac{N}{m}) m^{\lambda-1} \quad ,$$

$$\varphi_a(m) := \left(\frac{a}{m}\right)\sqrt{\frac{m}{k(m)}}\,\psi(m) \quad ,$$

wobei $m \in \mathbb{N}$, $(m,N) = 1$. Außerdem sei

$$\varphi := \varphi_1 \quad .$$

(Wegen $(m,N) = 1$ ist m ungerade, daher sind die auftretenden Restsymbole $\left(\frac{-1}{m}\right)$, $\left(\frac{N}{m}\right)$ und $\left(\frac{a}{m}\right)$ wohldefiniert).

Im folgenden Lemma werden wichtige Eigenschaften dieser Funktionen aufgeführt.

Lemma 1.2. Seien $a, m, n, \nu \in \mathbb{N}$ mit $(mn,N) = 1$, und es sei q eine Primzahl mit $q \nmid aN$; dann gilt

(i) $\psi(mn) = \psi(m)\psi(n)$,

(ii) $\varphi_a(mn) = \varphi_a(m)\varphi_a(n)$, falls $(m,n) = 1$,

(iii) $\varphi_a(q) = \left(\frac{a}{q}\right)\psi(q)$,

(iv) $\varphi_a(q^2) = q(\varphi_a(q))^2 = q^{1-2}$,

(v) $\varphi_a(q^{\nu+2}) = \varphi_a(q^\nu)\varphi_a(q^2)$.

Beweis. Die Abbildung $\mu\circ k : m \longmapsto \mu(k(m))$ ist offenbar multiplikativ. Ist p eine Primzahl und $\alpha \in \mathbb{N}$, so gilt $\mu(k(p^\alpha)) = [\mu(k(p))]^\alpha$. Daher ist $\mu\circ k$ sogar vollständig multiplikativ. Da die Abbildung

$$m \longmapsto \left(\frac{-1}{m}\right)^\lambda \left(\frac{N}{m}\right) m^{\lambda-1} \quad , \quad (m,N) = 1 \quad ,$$

ebenfalls vollständig multiplikativ ist, folgt Behauptung (i). Behauptung (ii) folgt aus (i), weil die Abbildung $m \longmapsto \sqrt{\frac{m}{k(m)}}$ multiplikativ ist. Behauptung (iii) folgt wegen $k(q) = q$. Mit (i) und (iii) gilt

$$\varphi_a(q^2) = \left(\frac{a}{q^2}\right)\sqrt{\frac{q^2}{k(q^2)}}\,\psi(q^2) = q\psi(q^2) = q(\psi(q))^2 =$$

$$= q((\tfrac{a}{q})\varphi_a(q))^2 = q(\varphi_a(q))^2 \quad .$$

Ferner ist

$$\psi(q^2) = \mu(k(q^2))\left(\frac{-1}{q^2}\right)^{\lambda}\left(\frac{N}{q^2}\right)q^{2(\lambda-1)} = q^{1-3} \quad ,$$

also

$$\varphi_a(q^2) = q^{1-2} \quad .$$

Schließlich folgt mit (i)

$$\varphi_a(q^{\nu+2}) = \left(\frac{a}{q^{\nu+2}}\right)\sqrt{\frac{q^{\nu+2}}{k(q^{\nu+2})}}\,\psi(q^{\nu+2}) =$$

$$= \left(\frac{a}{q^{\nu}}\right)q\sqrt{\frac{q^{\nu}}{k(q^{\nu})}}\,\psi(q^2)\psi(q^{\nu}) = q\psi(q^2)\varphi_a(q^{\nu}) = \varphi_a(q^2)\varphi_a(q^{\nu}) \; .$$

Damit sind auch (iv) und (v) gezeigt.

Ich beweise jetzt eine später mehrfach benutzte Formel für die Fourierkoeffizienten einer Eigenform von $T(q^2)$, q prim.

Lemma 1.3. Es sei $f \in \{\Gamma_0^0[N], -\frac{1}{2}, \varkappa_1\}$ eine Modulform mit der Fourierentwicklung

$$f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} c(m)\exp(\tfrac{2\pi i m\tau}{N}) \quad ,$$

und es gebe ein $t \in \mathbb{N}$ mit $c(t) = 1$. Ferner sei f eine Eigenform des Operators $T(q^2)$, wobei q eine Primzahl mit $q \nmid tN$ ist. Dann gilt für $m \in \mathbb{N}_0$

$$c(mq^2) = \left[c(tq^2) - \varphi_t(q) + (\tfrac{m}{q})\varphi(q)\right]c(m) - \varphi_t(q^2)c(mq^{-2}) \; .$$

Hier sind φ und φ_t wie in Definition 1.1; ferner ist $c(x) := 0$, falls $x \notin \mathbb{Z}$.

Beweis. Die Fourierkoeffizienten von $T(q^2)f$ seien mit $C(m)$ bezeichnet; nach Wohlfahrt ([10], Formel (10|5)) gilt für $m \in \mathbb{N}_0$

$$(7) \qquad C(m) = c(mq^2) + (\tfrac{-1}{q})^{\lambda}(\tfrac{mN}{q})q^{\lambda-1}c(m) + q^{1-2}c(mq^{-2})$$

($\lambda = \frac{1-1}{2}$ wie in Definition 1.1). Wegen $c(t) = 1$ ist f eine Eigenform von $T(q^2)$ zum Eigenwert $C(t)$; für $m \in \mathbb{N}_o$ gilt daher

$$C(m) = C(t)c(m) \quad ,$$

also

$$c(mq^2) + (\frac{-1}{q})^\lambda (\frac{mN}{q}) q^{\lambda-1} c(m) + q^{1-2} c(mq^{-2}) =$$

$$= \left[c(tq^2) + (\frac{-1}{q})^\lambda (\frac{tN}{q}) q^{\lambda-1} c(t) + q^{1-2} c(tq^{-2})\right] c(m) =$$

$$= \left[c(tq^2) + (\frac{-1}{q})^\lambda (\frac{tN}{q}) q^{\lambda-1}\right] c(m) \quad .$$

Daraus folgt mit Definition 1.1 und Lemma 1.2 (iv) die Behauptung.

Die anfangs erwähnte Multiplikationsformel wird im folgenden Lemma zunächst für einen Spezialfall bewiesen.

Lemma 1.4. Seien f , q und t wie in Lemma 1.3 . Ferner seien α , $\beta \in \mathbb{N}_o$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $q \nmid m$; ist β gerade, so sei zusätzlich $(\frac{m}{q}) = (\frac{t}{q})$. Dann gilt

$$(8) \qquad c(mq^\beta) c(tq^{2\alpha}) = \sum_{\nu=0}^{\gamma} \varphi_t(q^\nu) c(mq^{2\alpha+\beta-2\nu}) \quad ,$$

wobei $\gamma := \min\{2\alpha, \beta\}$ und φ_t wie in Definition 1.1.

Beweis. Der Fall $\alpha = 0$ ist trivial wegen $c(t) = 1$ und $\varphi_t(1) = 1$. Für $\alpha \geq 1$ beweise ich (8) durch Induktion über α .

Induktionsanfang $\alpha = 1$: Aus Lemma 1.3 folgt

$$c(mq^\beta) c(tq^2) =$$

$$= c(mq^{\beta+2}) + \left[\varphi_t(q) - (\frac{mq^\beta}{q})\varphi(q)\right] c(mq^\beta) + \varphi_t(q^2) c(mq^{\beta-2}) \quad .$$

Im Fall $\beta = 0$ ist nach Voraussetzung $(\frac{mq^\beta}{q}) = (\frac{m}{q}) = (\frac{t}{q})$,

also $\varphi_t(q) = (\frac{m}{q})\varphi(q)$; für $\beta \geq 1$ ist $(\frac{mq^\beta}{q}) = 0$, und für

$\beta \in \{0, 1\}$ ist $c(mq^{\beta-2}) = 0$. Daher folgt

$$c(mq^{\beta})c(tq^{2}) = \begin{cases} c(mq^{\beta+2}) & \beta = 0 \\ c(mq^{\beta+2}) + \varphi_t(q)c(mq^{\beta}) & \beta = 1 \\ c(mq^{\beta+2}) + \varphi_t(q)c(mq^{\beta}) + \varphi_t(q^2)c(mq^{\beta-2}) & \beta \geq 2 \,. \end{cases}$$

Damit ist (8) für $\alpha = 1$ bewiesen.

Sei nun $\alpha \in \mathbb{N}$ beliebig, und (8) sei bereits bewiesen für alle $\alpha' \leq \alpha$. Man formt den Koeffizienten $c(tq^{2(\alpha+1)})$ und das Produkt $c(mq^{\beta})c(tq^{2})$ mit Hilfe von Lemma 1.3 um und erhält

$$c(mq^{\beta})c(tq^{2(\alpha+1)}) = c(mq^{\beta})c(tq^{2\alpha}q^{2}) =$$

$$= c(mq^{\beta})\left[c(tq^{2})c(tq^{2\alpha}) - \varphi_t(q)c(tq^{2\alpha}) - \varphi_t(q^2)c(tq^{2(\alpha-1)})\right] =$$

$$= c(tq^{2\alpha})\left[c(mq^{\beta+2}) - \left(\frac{mq^{\beta}}{q}\right)\varphi(q)c(mq^{\beta}) + \varphi_t(q^2)c(mq^{\beta-2})\right] -$$

$$- \varphi_t(q^2)c(mq^{\beta})c(tq^{2(\alpha-1)}) \,.$$

Sei $\gamma_1 := \min\{2(\alpha-1), \beta\}$; aus der Induktionsvoraussetzung und Lemma 1.2 (v) folgt

$$c(mq^{\beta+2})c(tq^{2\alpha}) - \varphi_t(q^2)c(mq^{\beta})c(tq^{2(\alpha-1)}) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\gamma_1+2} \varphi_t(q^{\nu})c(mq^{2\alpha+\beta+2-2\nu}) -$$

$$- \varphi_t(q^2) \sum_{\nu=0}^{\gamma_1} \varphi_t(q^{\nu})c(mq^{2(\alpha-1)+\beta-2\nu}) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\gamma_1+2} \varphi_t(q^{\nu})c(mq^{2(\alpha+1)+\beta-2\nu}) -$$

$$- \sum_{\nu=0}^{\gamma_1} \varphi_t(q^{\nu+2})c(mq^{2(\alpha+1)+\beta-2(\nu+2)}) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{1} \varphi_t(q^{\nu})c(mq^{2(\alpha+1)+\beta-2\nu}) \,.$$

Daher gilt

$$c(mq^{\beta})c(tq^{2(\alpha+1)}) = \sum_{\nu=0}^{1} \varphi_t(q^{\nu})c(mq^{2(\alpha+1)+\beta-2\nu}) + \tag{9}$$

$$+\left[\varphi_t(q^2)c(mq^{\beta-2}) - (\tfrac{mq^{\beta}}{q})\varphi(q)c(mq^{\beta})\right]c(tq^{2\alpha}) .$$

Im Fall $\beta = 0$ ist $c(mq^{\beta-2}) = 0$ und nach Voraussetzung $(\frac{m}{q}) = (\frac{t}{q})$; nach Induktionsvoraussetzung ist ferner $c(m)c(tq^{2\alpha}) = c(mq^{2\alpha})$. Aus (9) folgt also

$$c(m)c(tq^{2(\alpha+1)}) = c(mq^{2(\alpha+1)}) \quad . \tag{10}$$

Im Fall $\beta = 1$ ist $(\frac{mq^{\beta}}{q}) = c(mq^{\beta-2}) = 0$, und aus (9) folgt

$$c(mq)c(tq^{2(\alpha+1)}) = \sum_{\nu=0}^{1} \varphi_t(q^{\nu})c(mq^{2(\alpha+1)+1-2\nu}) . \tag{11}$$

Für $\beta \geq 2$ ist ebenfalls $(\frac{mq^{\beta}}{q}) = 0$. Es sei $\gamma_2 := \min\{2(\alpha+1), \beta\}$; aus (9) folgt mit der Induktionsvoraussetzung und Lemma 1.2 (v)

$$c(mq^{\beta})c(tq^{2(\alpha+1)}) = \sum_{\nu=0}^{1} \varphi_t(q^{\nu})c(mq^{2(\alpha+1)+\beta-2\nu}) +$$

$$+ \varphi_t(q^2) \sum_{\nu=0}^{\gamma_2-2} \varphi_t(q^{\nu})c(mq^{2\alpha+\beta-2-2\nu}) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{1} \varphi_t(q^{\nu})c(mq^{2(\alpha+1)+\beta-2\nu}) + \tag{12}$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\gamma_2-2} \varphi_t(q^{\nu+2})c(mq^{2(\alpha+1)+\beta-2(\nu+2)}) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\gamma_2} \varphi_t(q^{\nu})c(mq^{2(\alpha+1)+\beta-2\nu}) .$$

Aus (10) , (11) und (12) folgt die Behauptung für $\alpha+1$.

Satz 1.5. Sei $f \in \{\Gamma_0^0[N], -\frac{1}{2}, \mathfrak{X}_1\}$ eine Modulform mit den Fourierkoeffizienten $c(m)$, $m \in \mathbb{N}_0$, und es gebe ein $t \in \mathbb{N}$ mit $c(t) = 1$. Für jede Primzahl q mit $q \nmid tN$ sei f eine Eigenform von $T(q^2)$. Ferner seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften :

(i) n ist Quadratzahl, $(n, tN) = 1$;

(ii) $(\frac{k(m)}{q}) = (\frac{t}{q})$ für jede Primzahl q mit $q \mid n$ und $q \nmid k(m)$.

Dann gilt

$$c(m)c(tn) = \sum_{d \mid (m,n)} \varphi_t(d)\, c(\frac{mn}{d^2}) \quad . \tag{13}$$

(Dabei wird über alle positiven gemeinsamen Teiler von m und n summiert.)

Beweis. Der Fall $n = 1$ ist offenbar trivial. Sei jetzt $n > 1$; der Beweis wird durch Induktion über die Anzahl r der verschiedenen Primfaktoren von n geführt.

Sei zunächst $r = 1$. Es gilt also $n = q^{2\alpha}$ mit einer Primzahl q und $\alpha \in \mathbb{N}$, wobei $q \nmid tN$. Weiter sei $m = m_1 q^\beta$ mit $m_1 \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{N}_0$ und $q \nmid m_1$. Die gemeinsamen Teiler von m und n sind alle Potenzen q^ν mit $0 \le \nu \le \min\{2\alpha, \beta\}$. Ist β gerade, so gilt

$$k(m) = k(m_1 q^\beta) = k(m_1) \quad ;$$

also gilt $q \nmid k(m)$, und damit

$$(\frac{k(m_1)}{q}) = (\frac{k(m)}{q}) = (\frac{t}{q}) \quad .$$

Nach Definition von $k(m_1)$ ist $\frac{m_1}{k(m_1)}$ eine Quadratzahl, und wegen der multiplikativen Eigenschaften des Legendre-Symbols gilt somit $(\frac{m_1}{q}) = (\frac{k(m_1)}{q})$. Daher folgt die Behauptung im Fall $r = 1$ aus Lemma 1.4.

Sei jetzt $r > 1$, und die Behauptung sei bereits bewiesen für alle $r' < r$. Es ist $n = \prod_{\nu=1}^{r} q_\nu^{2\alpha_\nu}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen q_ν und $\alpha_\nu \in \mathbb{N}$. Seien

$n_1 := q_1^{2\alpha_1}$, $n_2 := \frac{n}{n_1}$. Offenbar erfüllen m und n_1 die Induktionsvoraussetzung, und daher gilt

$$c(m)c(tn_1) = \sum_{d|(m,n_1)} \varphi_t(d)c(\frac{mn_1}{d^2}) \quad .$$

Ist q eine Primzahl mit $q|n_2$, so gilt $q\nmid n_1$, also $(\frac{n_1}{q}) = 1$, da n_1 eine Quadratzahl ist ; daher folgt

$$(\frac{k(tn_1)}{q}) = (\frac{tn_1}{q}) = (\frac{t}{q}) \quad .$$

Somit erfüllen tn_1 und n_2 die Induktionsvoraussetzung und wegen $(tn_1,n_2) = 1$ gilt

$$c(tn_1)c(tn_2) = c(tn_1n_2) = c(tn) \quad .$$

Ist d ein gemeinsamer Teiler von m und n_1 , so gilt $d = q_1^{\nu}$ mit $0 \le \nu \le \min\{2\alpha_1, \beta\}$, wobei $m = m_1 q_1^{\beta}$, $m_1 \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{N}_0$, $q_1 \nmid m_1$. Also ist $\frac{mn_1}{d^2} = m_1 q_1^{\beta+2\alpha_1-2\nu}$. Ist β gerade, so ist $q_1^{\beta+2\alpha_1-2\nu}$ eine Quadratzahl, und daher

$$k(\frac{mn_1}{d^2}) = k(m_1 q_1^{\beta+2\alpha_1-2\nu}) = k(m_1) = k(m_1 q_1^{\beta}) = k(m) \quad .$$

Ist β ungerade, so ist auch $\beta+2\alpha_1-2\nu$ ungerade; wegen $\beta+2\alpha_1-2\nu \ge 0$ gilt dann sogar $\beta+2\alpha_1-2\nu \ge 1$. Also ist $q_1^{\beta-1+2\alpha_1-2\nu}$ eine Quadratzahl, und daher ebenfalls

$$k(\frac{mn_1}{d^2}) = k(m_1 q_1 q_1^{\beta-1+2\alpha_1-2\nu}) = k(m_1 q_1) =$$

$$= k(m_1 q_1 q_1^{\beta-1}) = k(m) \quad .$$

Somit erfüllen auch $\frac{mn_1}{d^2}$ und n_2 die Induktionsvoraussetzung, und es gilt mit Lemma 1.2 (ii)

$$c(m)c(tn) = c(m)c(tn_1)c(tn_2) =$$

$$= c(tn_2) \sum_{d|(m,n_1)} \varphi_t(d)c(\frac{mn_1}{d^2}) =$$

$$= \sum_{d|(m,n_1)} \varphi_t(d) \sum_{s|(mn_1d^{-2},n_2)} \varphi_t(s)c(\frac{mn_1n_2}{d^2s^2}) =$$

$$= \sum_{d|(m,n_1)} \sum_{s|(mn_1d^{-2},n_2)} \varphi_t(ds)c(\frac{mn}{d^2s^2}) =$$

$$= \sum_{d|(m,n)} \varphi_t(d)c(\frac{mn}{d^2}) \quad .$$

Damit ist Satz 1.5 bewiesen.

Bemerkung. Ist $t = 1$, und wählt man für m eine Quadratzahl, so ist $k(m) = 1$ und damit die Bedingung (ii) erfüllt. Dieser Spezialfall wurde bereits von Wohlfahrt bewiesen ([10], p.251, Satz 6; s. auch Formel (1) der Einleitung). Ich gebe noch einige Beispiele für Zahlen m, die bei vorgegebenem n der Voraussetzung von Satz 1.5 genügen :

1.) Es gelte $n|(k(m))^{\infty}$; in diesem Fall gibt es keine Primzahl q mit $q|n$ und $q\nmid k(m)$.

2.) Sei $m = tm_1^2$, $m_1 \in \mathbb{N}$. Es ist $k(m) = k(t)$, also $(\frac{k(m)}{q}) = (\frac{k(t)}{q}) = (\frac{t}{q})$ für jede Primzahl q mit $q|n$. (Für diesen Fall siehe auch [9], p.453) .

3.) Sei m eine Primzahl mit $m \equiv t \bmod n$ (wegen $(t,n)=1$ gibt es nach einem bekannten Satz von Dirichlet unendlich viele solcher Primzahlen). Für jede Primzahl q mit $q|n$ gilt dann $m \equiv t \bmod q$, also $(\frac{k(m)}{q}) = (\frac{m}{q}) = (\frac{t}{q})$.

§2. Multiplikationsformeln für Darstellungsanzahlen

Für $l \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ sei $a_l(m)$ die Anzahl der verschiedenen Darstellungen von m als Summe von l Quadraten, d.h.

$$a_l(m) := \#\{(x_1,\dots,x_l) \in \mathbb{Z}^l \mid \sum_{\nu=1}^{l} x_\nu^2 = m\}$$

(ist M eine endliche Menge, so bezeichnet #M die Anzahl der Elemente von M).

Für $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \le l$ definiere ich noch

$$a_l(m,k) := \#\{(x_1,\dots,x_l) \in \mathbb{Z}^l \mid \sum_{\nu=1}^{l} x_\nu^2 = m \ ; \ x_\nu \text{ ungerade für } 1 \le \nu \le k \ ; \ x_\nu \text{ gerade für } k+1 \le \nu \le l\}.$$

(Offenbar gilt $a_l(m) = a_l(m,k) = 0$, falls $m < 0$).

Im Fall $l \in \{3, 5, 7\}$ lassen sich für die Darstellungsanzahlen $a_l(m,k)$ und $a_l(m)$ durch Anwendung von Satz 1.5 Multiplikationsformeln herleiten; dazu konstruiere ich nach einer Methode von Pfetzer Modulformen mit den Fourierkoeffizienten $a_l(m,k)$ bzw. $a_l(m)$, die sich als Eigenformen aller Operatoren $T(q^2)$ herausstellen, q ungerade Primzahl.

Pfetzer hat in [6] gezeigt, wie Modulformen mit Hilfe von quadratischen Formen ungerader Variablenzahl definiert werden können. Es sei $l \in \mathbb{N}$ mit $l \equiv 1 \bmod 2$ und $l \ge 3$; die Matrix $A \in \mathbb{Z}^{l \times l}$ sei symmetrisch und positiv-definit, und die Elemente in der Hauptdiagonale von A seien gerade. Weiter seien D die Determinante von A , K der größte gemeinsame Teiler aller (l-1)-reihigen Unterdeterminanten von A, und $N_1 := \frac{D}{K}$. Schließlich sei $\mathfrak{f} \in \mathbb{Z}^l$ mit $A\mathfrak{f}' \equiv 0 \bmod N_1$ (d.h. N_1 teilt jede Komponente des Vektors $A\mathfrak{f}'$; $\mathfrak{f}'$ ist der aus $\mathfrak{f}$ durch Transponieren entstehende Spaltenvektor). Unter diesen Voraussetzungen ist die Funktion

$$\vartheta(\tau, \mathfrak{f}, A) := \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^l \\ n \equiv \mathfrak{f} \bmod N_1}} \exp(\pi i \tau \frac{nAn'}{N_1^2})$$

eine Modulform aus dem Raum $\{\Gamma[2N_1], -\frac{1}{2}, \varkappa_1\}$.

Sei weiterhin $l \in \mathbb{N}$ mit $l \equiv 1 \bmod 2$ und $l \geq 3$. Im Fall $A := 2E^{(l)}$ gilt $D = 2^l$, $K = 2^{l-1}$ und $N_1 = 2$. Für jedes $\mathfrak{f} \in \mathbb{Z}^l$ ist $A\mathfrak{f} = 2\mathfrak{f} \equiv 0 \bmod N_1$; die Funktion $\vartheta(\tau, \mathfrak{f}, 2E^{(l)})$ ist daher eine Modulform aus $\{\Gamma[4], -\frac{1}{2}, \varkappa_1\}$.

Für $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq l$ sei

$$f_{l,k}(\tau) := \vartheta(\tau, \mathfrak{f}_{l,k}, 2E^{(l)}) ,$$

wobei $\mathfrak{f}_{l,k} = (h_{l,k}^{(1)}, \ldots, h_{l,k}^{(l)}) \in \mathbb{Z}^l$ der Vektor mit den Komponenten

$$h_{l,k}^{(\nu)} := \begin{cases} 1 & 1 \leq \nu \leq k \\ 0 & k+1 \leq \nu \leq l \end{cases}$$

ist. Es gilt $f_{l,k} \in \{\Gamma[4], -\frac{1}{2}, \varkappa_1\}$ und

$$f_{l,k}(\tau) = \sum_{\substack{\mathfrak{n} \in \mathbb{Z}^l \\ \mathfrak{n} \equiv \mathfrak{f}_{l,k} \bmod 2}} \exp(\pi i \tau \frac{2\mathfrak{n}\mathfrak{n}'}{4}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_l(m,k) \exp(\frac{2\pi i m \tau}{4}) ,$$

d.h. die Darstellungsanzahlen $a_l(m,k)$ sind die Fourierkoeffizienten von $f_{l,k}$.

Auf dem Raum $\{\Gamma[4], -\frac{1}{2}, \varkappa_1\}$ sind gemäß §0 Operatoren Heckescher Art erklärt (es ist $\Gamma[4] = \Gamma_0^0[4]$). Im Fall $l \in \{3, 5\}$ erweisen sich die Modulformen $f_{l,k}$, $0 \leq k \leq l$, als Eigenformen aller Operatoren $T(q^2)$, q ungerade Primzahl (Satz 2.3 , Satz 2.6). Im Fall $l = 7$ gibt es unter den Modulformen $f_{7,k}$, $0 \leq k \leq 7$, auch solche, die keine Eigenformen sind; jedoch stellen sich gewisse Linearkombinationen der $f_{7,k}$ als Eigenformen heraus (Satz 2.9 (i) , Satz 2.9 (iii)). Aus den Ergebnissen über die $f_{l,k}$ folgt, daß für $l \in \{3, 5, 7\}$ die Modulform $f_l \in \{\Gamma[4], -\frac{1}{2}, \varkappa_1\}$ mit

$$f_l(\tau) := \sum_{m=0}^{\infty} a_l(m) \exp(\frac{2\pi i m \tau}{4})$$

eine Eigenform aller $T(q^2)$ ist; mit Satz 1.5 erhält man daher Multiplikationsformeln für $a_l(m)$ (Satz 2.5, Satz 2.8 und Satz 2.10).

Bevor ich die Fälle $l = 3, 5, 7$ im Einzelnen untersuche, stelle ich noch einige später benötigte Formeln sowie zwei Hilfssätze (Lemma 2.1, Lemma 2.2) zusammen.

Aus der Definition von $a_l(m,k)$ folgt offenbar

$$a_l(m,k) = 0 \quad , \qquad \text{falls } m \not\equiv k \bmod 4 \; . \tag{14}$$

Sei q eine ungerade Primzahl; ich bezeichne die Fourierkoeffizienten der Modulform $T(q^2)f_{l,k}$ mit $C_{l,k}(m)$, $m \in \mathbb{N}_0$. Nach [10], Formel (10|5), gilt

$$C_{l,k}(m) = a_l(mq^2,k) + (\tfrac{-1}{q})^{\lambda}(\tfrac{m}{q})q^{\lambda-1}a_l(m,k) + q^{l-2}a_l(mq^{-2},k), \tag{15}$$

wobei $\lambda := \frac{l-1}{2}$ (vergl. auch den Beweis von Lemma 1.3). Es ist $mq^2 \equiv m \bmod 4$, und im Fall $q^2 | m$ gilt auch $mq^{-2} \equiv m \bmod 4$; daher folgt aus (14) und (15)

$$C_{l,k}(m) = 0 \quad , \qquad \text{falls } m \not\equiv k \bmod 4 \; . \tag{16}$$

Lemma 2.1. Seien q eine ungerade Primzahl und c eine natürliche Zahl, die durch kein Primzahlquadrat teilbar ist. Dann gilt für $l \in \{3, 5, 7\}$

$$a_l(cq^2) = (q^{l-2} - (\tfrac{-1}{q})^{\lambda}(\tfrac{c}{q})q^{\lambda-1} + 1)a_l(c) \tag{17}$$

($\lambda = \frac{l-1}{2}$). Ferner gilt

$$a_5(4q^2) = 9a_5(q^2) \quad , \tag{18}$$

$$a_7(4q^2) = 41a_7(q^2) \quad . \tag{19}$$

Den Beweis für Lemma 2.1 entnimmt man der Arbeit [3].

Lemma 2.2. Die Modulform $f \in \{\Gamma[4], -\frac{1}{2}, \varkappa_1\}$ habe die Fourierentwicklung

$$f(\tau) = \sum_{m=m_0}^{\infty} c(m)\exp(\tfrac{2\pi i m\tau}{4}) \tag{20}$$

mit $m_o > 1$; dann ist $f = 0$.

Beweis. Für $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(4)$ ist $\varkappa_1(L) = \left(\frac{c}{d}\right)_*$, also $(\varkappa_1(L))^2 = 1$ (s. §0) . Daher ist $f^2 \in \{\Gamma(4), -1, 1\}$. Sei $f^2 \neq 0$; f^2 hat bei $i\infty$ eine Nullstelle, deren Ordnung (gemessen in der lokalen Variablen $\exp(\frac{2\pi i\tau}{4})$) m_1 sei. Aus (20) folgt $m_1 \geq 2m_o > 21$; es gilt jedoch nach [8] , p.114 ,

$$m_1 \leq \frac{1\cdot[\Gamma:\Gamma[4]]}{12} = \frac{24\,1}{12} = 21 \quad .$$

Das ist ein Widerspruch, also $f^2 = 0$, und damit $f = 0$.

Der Fall $l = 3$

Satz 2.3. Für jede ungerade Primzahl q gilt

$$T(q^2)f_{3,k} = (q+1)f_{3,k} \quad , \quad 0 \leq k \leq 3 \quad .$$

Beweis. Ich erläutere zunächst den Beweisgang : Mit Hilfe der Formeln (14) - (17) wird gezeigt, daß die Modulform $T(q^2)f_{3,k} - (q+1)f_{3,k}$ bei $i\infty$ eine Nullstelle mindestens vierter Ordnung hat. Aus Lemma 2.2 folgt daher $T(q^2)f_{3,k} - (q+1)f_{3,k} = 0$. Um (17) anwenden zu können, benötigt man noch eine Beziehung zwischen $a_3(m)$ und $a_3(m,k)$ (s. (22)) . Ähnliche Überlegungen wende ich später auch in den Fällen $l = 5$ und $l = 7$ an.

Mit $C_{3,k}(m)$ bezeichne ich wieder die Fourierkoeffizienten von $T(q^2)f_{3,k}$. Nach (14) und (16) gilt für $0 \leq k \leq 3$

$$T(q^2)f_{3,k}(\tau) - (q+1)f_{3,k}(\tau) = (C_{3,k}(k) - (q+1)a_3(k,k))\exp(\frac{2\pi ik\tau}{4}) +$$

$$+ \sum_{m=4}^{\infty} (C_{3,k}(m) - (q+1)a_3(m,k))\exp(\frac{2\pi im\tau}{4}) \quad .$$

Im Hinblick auf Lemma 2.2 ist also nur noch zu zeigen

$$(21) \qquad C_{3,k}(k) = (q+1)a_3(k,k) \quad , \quad 0 \leq k \leq 3 \quad .$$

Beim Beweis von (21) unterscheide ich die Fälle $k = 0$

und $k>0$.

1.) $k=0$. Aus (15) folgt

$$C_{3,0}(0) = a_3(0,0) + qa_3(0,0) = (q+1)a_3(0,0) .$$

2.) $k>0$. Es gilt offenbar für $m \in \mathbb{N}_0$

$$a_3(m) = \begin{cases} a_3(m,0) & m \equiv 0 \bmod 4 \\ 3a_3(m,1) & m \equiv 1 \bmod 4 \\ 3a_3(m,2) & m \equiv 2 \bmod 4 \\ a_3(m,3) & m \equiv 3 \bmod 4 . \end{cases} \tag{22}$$

Mit

$$\alpha_k := \begin{cases} \frac{1}{3} & k \in \{1,2\} \\ 1 & k=3 \end{cases}$$

folgt aus (15) und (17)

$$C_{3,k}(k) = a_3(kq^2,k) + (\tfrac{-k}{q})a_3(k,k) = \alpha_k(a_3(kq^2) + (\tfrac{-k}{q})a_3(k)) =$$

$$= \alpha_k(q+1)a_3(k) = (q+1)a_3(k,k) .$$

Damit ist (21) bewiesen.

Korollar 2.4. Für jede ungerade Primzahl q und jede Modulform $f \in \{\Gamma[4], -\frac{3}{2}, \varkappa_3\}$ gilt

$$T(q^2)f = (q+1)f .$$

Beweis. Die Fourierkoeffizienten von f seien mit c(m) bezeichnet. Es gilt $a_3(k,k) = 2^k$, $0 \le k \le 3$; daher hat die Modulform $f - \sum_{k=0}^{3} c(k)2^{-k}f_{3,k}$ bei $i\infty$ eine Nullstelle mindestens vierter Ordnung. Aus Lemma 2.2 folgt $f - \sum_{k=0}^{3} c(k)2^{-k}f_{3,k} = 0$, d.h. die $f_{3,k}$ spannen den Raum $\{\Gamma[4], -\frac{3}{2}, \varkappa_3\}$ auf. Da die Eigenformen $f_{3,k}$ zum selben Eigenwert von $T(q^2)$ gehören, folgt die Behauptung.

Wegen Satz 2.3 gelten für die Koeffizienten $a_3(m,k)$ Multiplikationsformeln gemäß Satz 1.5 . Für die Darstellungsanzahlen $a_3(m)$ erhält man mit Hilfe der obigen Er-

gebnisse ebenfalls eine Multiplikationsformel :

Satz 2.5. Seien $m, n, t \in \mathbb{N}$; n sei eine Quadratzahl mit $(n,4t) = 1$, und für jede Primzahl q mit $q|n$ und $q \nmid k(m)$ sei $\left(\frac{k(m)}{q}\right) = \left(\frac{t}{q}\right)$. Dann gilt

$$a_3(m)a_3(tn) = a_3(t) \sum_{d|(m,n)} \mu(k(d))\left(\frac{-t}{d}\right)\sqrt{\frac{d}{k(d)}}\, a_3\left(\frac{mn}{d^2}\right) .$$

Beweis. Die Modulform

$$f_3 := f_{3,0} + f_{3,3} + 3(f_{3,1} + f_{3,2})$$

hat nach (22) die Fourierkoeffizienten $a_3(m)$ und ist eine Eigenform aller $T(q^2)$, q ungerade Primzahl. Im Fall $a_3(t) \neq 0$ folgt die Behauptung durch Anwendung von Satz 1.5 auf die Modulform $\frac{1}{a_3(t)} f_3$. Ist $a_3(t) = 0$, so gibt es α , $\beta \in \mathbb{N}_0$ mit $t = 4^\alpha(8\beta+7)$ ([1] , p.261) . Da n nach Voraussetzung eine ungerade Quadratzahl ist , gilt $n \equiv 1 \bmod 8$, und es gibt ein $\beta_1 \in \mathbb{N}_0$ mit $tn = 4^\alpha(8\beta_1+7)$. Daher gilt auch $a_3(tn) = 0$, womit der Satz bewiesen ist. (Interessant ist die obige Multiplikationsformel natürlich nur für $a_3(t) \neq 0$).

Einen Spezialfall dieses Satzes hat bereits Wohlfahrt bewiesen ([10] , p.255 ; dort ist m eine ungerade Quadratzahl und $t = 1$).

Der Fall $l = 5$

Beim Beweis von Satz 2.6 benötige ich die folgenden Relationen (23) - (26) zwischen den Darstellungsanzahlen $a_5(m)$ und $a_5(m,k)$. Für $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(23) \qquad a_5(m) = \begin{cases} a_5(m,0) + 5a_5(m,4) & m \equiv 0 \bmod 4 \\ 5a_5(m,1) + a_5(m,5) & m \equiv 1 \bmod 4 \\ 10a_5(m,2) & m \equiv 2 \bmod 4 \\ 10a_5(m,3) & m \equiv 3 \bmod 4 \end{cases} .$$

(Die erste Gleichung erhält man folgendermaßen : Gilt

$\sum_{\nu=1}^{5} x_\nu^2 = m \equiv 0 \bmod 4$, $x_\nu \in \mathbb{Z}$, so sind entweder die Zahlen $x_1,\ldots,x_5$ alle gerade, oder es ist genau ein x_ν gerade. Nach Definition gibt es $a_5(m,0)$ Darstellungen, in denen $x_1,\ldots,x_5$ gerade sind, und $a_5(m,4)$ Darstellungen, in denen nur x_5 gerade ist. Daher gilt $a_5(m) = a_5(m,0) + 5a_5(m,4)$. Die übrigen Gleichungen beweist man analog.)

Ich benutze (23), um noch weitere Beziehungen zwischen $a_5(m)$ und $a_5(m,k)$ herzuleiten. Für $m \in \mathbb{N}$ mit $a_5(m,5) > 0$ gilt offenbar $m \equiv 5 \bmod 8$. Aus (23) folgt daher

$$a_5(m) = 5a_5(m,1) \quad , \quad \text{falls } m \equiv 1 \bmod 8 \quad . \tag{24}$$

Für $m \in \mathbb{N}$ mit $m \equiv 5 \bmod 8$ gilt

$$a_5(m,5) = 2a_5(m,1) \quad , \tag{25}$$

$$a_5(m) = 7a_5(m,1) \quad . \tag{26}$$

Formel (26) folgt mit (25) aus (23). Ich beweise jetzt Formel (25) : Offenbar gilt

$$a_5(m,1) = \sum_{\nu \equiv 1 \bmod 2} a_4(m-\nu^2,0) \quad , \tag{27}$$

$$a_5(m,5) = \sum_{\nu \equiv 1 \bmod 2} a_4(m-\nu^2,4) \quad . \tag{28}$$

Für ungerades $\nu \in \mathbb{Z}$ gilt $\nu^2 \equiv 1 \bmod 8$, also $m-\nu^2 \equiv 4 \bmod 8$, und damit $\frac{m-\nu^2}{4} \equiv 1 \bmod 2$. Aus der bekannten Darstellung $a_4(n) = 8 \sum_{4 \nmid d \mid n} d$, $n \in \mathbb{N}$, ([1] , p.285) folgt $a_4(4n) = 3a_4(n)$, falls $n \equiv 1 \bmod 2$. Daher gilt

$$a_4(m-\nu^2,0) + a_4(m-\nu^2,4) = a_4(m-\nu^2) = 3a_4\left(\frac{m-\nu^2}{4}\right) = 3a_4(m-\nu^2,0) \quad ,$$

d.h.

$$a_4(m-\nu^2,4) = 2a_4(m-\nu^2,0) \quad .$$

Mit (27) und (28) folgt hieraus Formel (25).

Satz 2.6. Für jede ungerade Primzahl q gilt

$$T(q^2)f_{5,k} = (q^3+1)f_{5,k} \quad , \quad 0 \le k \le 5 \ .$$

Beweis. Die Beweismethode ist dieselbe wie bei Satz 2.3 . Mit Rücksicht auf (14) , (16) und Lemma 2.2 genügt es, für die Fourierkoeffizienten $C_{5,k}(m)$ von $T(q^2)f_{5,k}$ folgende Gleichungen nachzuweisen :

$$(29) \qquad C_{5,k}(k) = (q^3+1)a_5(k,k) \qquad 0 \le k \le 5 \ ,$$

$$(30) \qquad C_{5,k}(k+4) = (q^3+1)a_5(k+4,k) \quad , \quad k \in \{0,1\} \ ,$$

$$(31) \qquad C_{5,k}(k-4) = (q^3+1)a_5(k-4,k) \quad , \quad k \in \{4,5\} \ .$$

Ich beweise zunächst (29) und unterscheide dabei die Fälle $k = 0$, $k = 4$ und $k \in \{1,2,3,5\}$.

1.) $k = 0$. Aus (15) folgt

$$C_{5,0}(0) = a_5(0,0) + q^3 a_5(0,0) = (q^3+1)a_5(0,0) \ .$$

2.) $k = 4$. Mit (15) , (17) , (18) und (23) gilt

$$C_{5,4}(4) = a_5(4q^2,4) + qa_5(4,4) =$$

$$= \frac{1}{5}(a_5(4q^2) - a_5(4q^2,0)) + 16q = \frac{1}{5}(9a_5(q^2) - a_5(q^2)) + 16q =$$

$$= \frac{8}{5}(q^3-q+1)a_5(1) + 16q = 16(q^3-q+1) + 16q = (q^3+1)a_5(4,4) \ .$$

3.) $k \in \{1,2,3,5\}$. Es sei

$$\alpha_k := \begin{cases} \frac{1}{5} & k = 1 \\ \frac{1}{10} & k \in \{2,3\} \\ \frac{2}{7} & k = 5 \end{cases} \ ;$$

aus (15) , (17) und (23) - (26) folgt

$$C_{5,k}(k) = a_5(kq^2,k) + (\tfrac{k}{q})qa_5(k,k) =$$

$$= \alpha_k(a_5(kq^2) + (\tfrac{k}{q})qa_5(k)) = \alpha_k(q^3+1)a_5(k) = (q^3+1)a_5(k,k) \ .$$

Damit ist (29) bewiesen.

Beim Beweis von (30) werden (15), (17) und (26) benutzt :

$$C_{5,0}(4) = a_5(4q^2,0) + qa_5(4,0) = a_5(q^2) + qa_5(1) =$$

$$= (q^3+1)a_5(1) = (q^3+1)a_5(4,0) \quad ,$$

$$C_{5,1}(5) = a_5(5q^2,1) + (\tfrac{5}{q})qa_5(5,1) = \tfrac{1}{7}(a_5(5q^2) + (\tfrac{5}{q})qa_5(5)) =$$

$$= \tfrac{1}{7}(q^3+1)a_5(5) = (q^3+1)a_5(5,1) \quad .$$

Der Beweis von (31) erfolgt ebenfalls mit (15) :

$$C_{5,4}(0) = a_5(0,4) + q^3a_5(0,4) = (q^3+1)a_5(0,4) \; ;$$

ferner ist $a_5(1,5) = 0$, und wegen $q^2 \equiv 1 \bmod 8$ gilt auch $a_5(q^2,5) = 0$, also $C_{5,5}(1) = a_5(q^2,5) + qa_5(1,5) = 0$. Damit ist Satz 2.6 bewiesen.

Korollar 2.7. Für jede ungerade Primzahl q und jede Modulform $f \in \{ \Gamma[4] , -\frac{5}{2} , \varkappa_5 \}$ gilt

$$T(q^2)f = (q^3+1)f \; .$$

Beweis. Man zeigt mit Lemma 2.2 , daß die Modulformen $f_{5,k}$, $0 \le k \le 5$, den Raum $\{ \Gamma[4] , -\frac{5}{2} , \varkappa_5 \}$ aufspannen (vergl. Beweis von Korollar 2.4) ; die Behauptung folgt dann aus Satz 2.6 .

Mit Satz 1.5 und Satz 2.6 erhält man Multiplikationsformeln für die Koeffizienten $a_5(m,k)$; ferner gilt

Satz 2.8. Seien m , n , t wie in Satz 2.5 ; dann ist

$$a_5(m)a_5(tn) = a_5(t) \sum_{d \mid (m,n)} \mu(k(d))(\tfrac{t}{d})d\sqrt{\tfrac{d}{k(d)}}\, a_5(\tfrac{mn}{d^2}) \; .$$

Beweis. Die Modulform

$$f_5 := f_{5,0} + f_{5,5} + 5(f_{5,1} + f_{5,4}) + 10(f_{5,2} + f_{5,3})$$

hat nach (23) die Fourierkoeffizienten $a_5(m)$ und ist

eine Eigenform aller $T(q^2)$, q ungerade Primzahl. Es gilt $a_4(t) = 8 \sum_{4\nmid d \mid t} d \neq 0$, also auch $a_5(t) \neq 0$. Man wendet Satz 1.5 auf die Modulform $\frac{1}{a_5(t)} f_5$ an und erhält die Behauptung.

Der Fall l = 7

Die bisher angewandte Methode, Multiplikationsformeln für $a_1(m)$ zu gewinnen, muß in diesem Fall etwas abgeändert werden, denn nicht alle Modulformen $f_{7,k}$, $0 \le k \le 7$, sind Eigenformen von $T(q^2)$ (Satz 2.9 (iii)). Da sich aber geeignete Linearkombinationen der $f_{7,k}$ als Eigenformen jedes Operators $T(q^2)$ herausstellen, kann auch für die Darstellungsanzahlen $a_7(m)$ eine Multiplikationsformel bewiesen werden (Satz 2.9 (i), Satz 2.10).

Es gilt für $m \in \mathbb{N}_0$

$$(32) \qquad a_7(m) = \begin{cases} a_7(m,0) + 35a_7(m,4) & m \equiv 0 \bmod 4 \\ 7a_7(m,1) + 21a_7(m,5) & m \equiv 1 \bmod 4 \\ 21a_7(m,2) + 7a_7(m,6) & m \equiv 2 \bmod 4 \\ 35a_7(m,3) + a_7(m,7) & m \equiv 3 \bmod 4 \end{cases} ;$$

man beweist (32) ähnlich wie (23).

Ich definiere Modulformen $g_k \in \{ \Gamma[4] , -\frac{7}{2} , \varkappa_7 \}$ für $0 \le k \le 3$ durch

$$g_0 := f_{7,0} + 35f_{7,4} \quad , \quad g_1 := 7f_{7,1} + 21f_{7,5} \quad ,$$

$$g_2 := 21f_{7,2} + 7f_{7,6} \quad , \quad g_3 := 35f_{7,3} + f_{7,7} \quad .$$

Die Fourierkoeffizienten von g_k seien mit $c_k(m)$ bezeichnet; aus (32) folgt

$$(33) \qquad c_k(m) = \begin{cases} a_7(m) & m \equiv k \bmod 4 \\ 0 & m \not\equiv k \bmod 4 \end{cases} .$$

Satz 2.9. Sei q eine ungerade Primzahl; dann gilt

(i) $T(q^2)g_k = (q^5+1)g_k \quad , \quad 0 \le k \le 3 \quad ,$

(ii) $T(q^2)f_{7,k} = (q^5+1)f_{7,k} \quad , \quad k \in \{0,3,4,7\} \quad ,$

(iii) $f_{7,5}$ und $f_{7,6}$ sind keine Eigenformen von $T(q^2)$.

Beweis von (i) . Ich bezeichne mit $C_k(m)$ die Fourierkoeffizienten von $T(q^2)g_k$. Es genügt im Hinblick auf Lemma 2.2 folgende Gleichungen nachzuweisen :

$$C_k(k) = (q^5+1)a_7(k) \quad , \quad 0 \le k \le 3 \quad ,$$

$$C_k(k+4) = (q^5+1)a_7(k+4) \quad , \quad 0 \le k \le 3 \quad .$$

Man beweist diese Gleichungen mit (15) , (17) und (19) .

Beweis von (ii) . Für die Fourierkoeffizienten $C_{7,0}(m)$ von $f_{7,0}$ sind folgende Gleichungen zu zeigen :

$$C_{7,0}(0) = (q^5+1)a_7(0,0) \quad ,$$

$$C_{7,0}(4) = (q^5+1)a_7(4,0) \quad .$$

Der Beweis geschieht mit (15) und (17) (vergl. den Beweis von Satz 2.6 für die Modulform $f_{5,0}$) . Wegen (i) ist auch $f_{7,4} = \frac{1}{35}(g_0 - f_{7,0})$ eine Eigenform von $T(q^2)$ zum Eigenwert q^5+1 . Für die Fourierkoeffizienten von $f_{7,7}$ ist zu zeigen

$$C_{7,7}(3) = (q^5+1)a_7(3,7) \quad ,$$

$$C_{7,7}(7) = (q^5+1)a_7(7,7) \quad .$$

Aus (15) folgt

$$C_{7,7}(3) = a_7(3q^2,7) + (\tfrac{-3}{q})q^2 a_7(3,7) = 0 = (q^5+1)a_7(3,7) \, ,$$

da $a_7(m,7) = 0$ für $m \not\equiv 7 \bmod 8$. Seien jetzt $m , \nu \in \mathbb{N}$ mit $m \equiv 7 \bmod 8$ und $\nu \equiv 3 \bmod 8$. Dann ist $m-\nu \equiv 4 \bmod 8$,

also $a_4(m-\nu,4) = 2a_4(m-\nu,0)$ (vergl. Beweis von (25)). Daher gilt mit (32)

$$a_7(m) = 35a_7(m,3) + a_7(m,7) =$$

$$= 35 \sum_{\nu \equiv 3 \bmod 8} a_3(\nu)a_4(m-\nu,0) + \sum_{\nu \equiv 3 \bmod 8} a_3(\nu)a_4(m-\nu,4) =$$

$$= 37 \sum_{\nu \equiv 3 \bmod 8} a_3(\nu)a_4(m-\nu,0) = 37a_7(m,3) \quad ,$$

also

$$a_7(m,7) = 2a_7(m,3) = \frac{2}{37}a_7(m) \quad .$$

Damit folgt aus (15) und (17)

$$C_{7,7}(7) = a_7(7q^2,7) + (\frac{-7}{q})q^2a_7(7,7) =$$

$$= \frac{2}{37}(a_7(7q^2) + (\frac{-7}{q})q^2a_7(7)) =$$

$$= \frac{2}{37}(q^5+1)a_7(7) = (q^5+1)a_7(7,7) \quad .$$

Also ist $f_{7,7}$ eine Eigenform von $T(q^2)$ zum Eigenwert q^5+1 , und wegen (i) folgt die Behauptung auch für $f_{7,3} = \frac{1}{35}(g_3 - f_{7,7})$.

Beweis von (iii) . Es gilt $a_7(1,5) = 0$, aber

$$C_{7,5}(1) = a_7(q^2,5) + (\frac{-1}{q})q^2a_7(1,5) = a_7(q^2,5) \neq 0 \quad .$$

(Es ist $q^2-4 \equiv 5 \bmod 8$, also $a_3(q^2-4) \neq 0$ ([1] , p.261). Daher gibt es $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $q^2-4 = x^2+y^2+z^2$. Von den Zahlen x, y, z ist genau eine ungerade, etwa x ; es gilt $q^2 = 1^2+1^2+1^2+1^2+x^2+y^2+z^2$, also $a_7(q^2,5) \neq 0$.) Daher ist $f_{7,5}$ keine Eigenform von $T(q^2)$. Ferner gilt $a_7(2,6) = 0$ und

$$C_{7,6}(2) = a_7(2q^2,6) + (\frac{-2}{q})q^2a_7(2,6) = a_7(2q^2,6) \neq 0 \quad .$$

(Es ist $q^2-3 \equiv 6 \bmod 8$, also gibt es $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $q^2-3 = x^2+y^2+z^2$. Von den Zahlen x, y, z ist genau eine gerade, etwa z ; es ist $2q^2 = 1^2+1^2+1^2+q^2+x^2+y^2+z^2$, also $a_7(2q^2,6) \neq 0$.) Daher ist auch $f_{7,6}$ keine Eigenform von

$T(q^2)$. Damit ist Satz 2.9 bewiesen.

Die Modulform $f_7 := \sum_{k=0}^{3} g_k$ hat nach (33) die Fourierkoeffizienten $a_7(m)$ und ist nach Satz 2.9 (i) eine Eigenform aller $T(q^2)$, q ungerade Primzahl. Durch Anwenden von Satz 1.5 auf die Modulform $\frac{1}{a_7(t)} f_7$ erhält man

Satz 2.10. Seien m , n , t wie in Satz 2.5 ; dann gilt

$$a_7(m)a_7(tn) = a_7(t) \sum_{d \mid (m,n)} \mu(k(d))\left(\frac{-t}{d}\right) d^2 \sqrt{\frac{d}{k(d)}}\, a_7\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

§3. Multiplikationsformeln für Operatoren Heckescher Art

Seien wieder l und N zwei feste natürliche Zahlen mit $l \equiv 1 \bmod 2$ und $N \equiv 0 \bmod 4$.

Auf dem Raum $\{\Gamma_0^0[N] , -\frac{1}{2} , \varkappa_l\}$ ist zu jedem $n \in \mathbb{N}$ mit $(n,N) = 1$ ein Operator $T(n^2)$ Heckescher Art erklärt (s. §0) ; aus den Operatoren $T(n^2)$ werde ich durch geeignetes Aufsummieren (s. Definition 3.2) neue Operatoren $\tilde{T}(n^2)$ konstruieren, für die eine ähnliche Multiplikationsformel gilt wie für die Fourierkoeffizienten einer Eigenform aller $T(q^2)$ (vergl. Satz 3.6 und Formel (1) der Einleitung). Mit Hilfe von Lemma 3.4 , einem Spezialfall von Satz 3.6 , beweise ich dann eine Multiplikationsformel für die ursprünglichen Operatoren $T(n^2)$ (Satz 3.7) .

Der entscheidende Schritt beim Beweis von Satz 3.6 ist die Berechnung des Produktes $T(q^{2\alpha})T(q^2)$ für eine Primzahl q mit $q \nmid N$ und $\alpha \in \mathbb{N}$; dabei werden Eigenschaften von Fourierkoeffizienten ausgenutzt.

Lemma 3.1. Seien q eine Primzahl mit $q \nmid N$ und $\alpha \in \mathbb{N}$; dann gilt

$$(34) \quad T(q^{2\alpha})T(q^2) = T(q^{2(\alpha+1)}) + \chi(\alpha)\varphi(q^2)T(q^{2(\alpha-1)})$$

mit der Funktion φ aus Definition 1.1 und

$$\chi(\alpha) = \begin{cases} 1+\frac{1}{q} & \alpha = 1 \\ 1 & \alpha > 1 \end{cases} .$$

Beweis. Sei $f \in \{\Gamma_0^0[N], -\frac{1}{2}, \varkappa_1\}$. Mit $c(m), c_\beta(m)$ bzw. $C_\beta(m)$ bezeichne ich die Fourierkoeffizienten von f, $T(q^{2\beta})f$ bzw. $T(q^{2\beta})T(q^2)f$, wobei $m, \beta \in \mathbb{N}_0$. Ich werde die Gleichung

(35) $$C_\alpha(m) = c_{\alpha+1}(m) + \chi(\alpha)\varphi(q^2)c_{\alpha-1}(m) \quad , \quad m \in \mathbb{N}_0 ,$$

beweisen; aus (35) folgt

$$T(q^{2\alpha})T(q^2)f = T(q^{2(\alpha+1)})f + \chi(\alpha)\varphi(q^2)T(q^{2(\alpha-1)})f ,$$

also die Behauptung.

Für den folgenden Beweis von (35) sei eine Zahl $m \in \mathbb{N}_0$ fest vorgegeben. Ich führe noch einige Bezeichnungen ein : Für $x \in \mathbb{R}$ seien

$$e(x) := \exp(2\pi i x) ,$$

$$\delta(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} ;$$

ferner seien $r := \frac{1}{2}$ und $\lambda := \frac{l-1}{2}$. Für ungerades $t \in \mathbb{N}$ sei

(36) $$\varepsilon(t) := \begin{cases} 1 & t \equiv 1 \bmod 4 \\ i(-1)^{\lambda+1} & t \equiv -1 \bmod 4 \end{cases} .$$

Für $\beta, \nu \in \mathbb{N}_0$ mit $\nu \le 2\beta$ und $t := (q^\nu, q^{2\beta-\nu})$ sei

$$S(\beta,\nu) := \varepsilon(t) \sum_{b \bmod t} (\tfrac{bN}{t}) e(bmq^{-\nu}) ,$$

(37) $$A(\beta,\nu) := q^{\nu(r-1)} t^{-1} S(\beta,\nu) c(mq^{2(\beta-\nu)}) ,$$

(38) $$B(\beta,\nu) := q^{\nu(r-1)} t^{-1} S(\beta,\nu) c_1(mq^{2(\beta-\nu)})$$

(wobei $c(x) := c_1(x) := 0$, falls $x \notin \mathbb{Z}$).
Nach [10], p.247, gilt

(39) $$c_\beta(m) = \sum_{\nu=0}^{2\beta} A(\beta,\nu) ,$$

$$(40) \qquad C_\beta(m) = \sum_{\nu=0}^{2\beta} B(\beta,\nu) \quad .$$

Ich berechne jetzt $A(\alpha,\nu)$ und $B(\alpha,\nu)$; (35) erweist sich dann als leichte Folgerung aus (39) und (40) .

1.) Berechnung von $A(\alpha,\nu)$. Für $\nu \in \mathbb{N}_o$ mit $\nu \le 2\alpha$ sei $t_\nu := (q^\nu, q^{2\alpha-\nu})$; es ist

$$(41) \qquad t_\nu = \begin{cases} q^\nu & \nu \le \alpha \\ q^{2\alpha-\nu} & \nu > \alpha \end{cases} \quad .$$

Für $b \in \mathbb{Z}$ mit $(b,t_\nu) = 1$ folgt

$$(42) \qquad \varepsilon(t_\nu)\left(\frac{bN}{t_\nu}\right) = \begin{cases} 1 & \nu \equiv 0 \bmod 2 \\ \varepsilon(q)\left(\frac{bN}{q}\right) & \nu \equiv 1 \bmod 2 \end{cases} \quad .$$

(Ist ν gerade, so ist t_ν ein Quadrat, also $\left(\frac{bN}{t_\nu}\right) = 1$ wegen $(bN,t_\nu) = 1$, und $\varepsilon(t_\nu) = 1$ wegen $t_\nu \equiv 1 \bmod 4$; für ungerades ν ist t_ν eine ungerade Potenz von q , also $\left(\frac{bN}{t_\nu}\right) = \left(\frac{bN}{q}\right)$, und $\varepsilon(t_\nu) = \varepsilon(q)$ wegen $t_\nu \equiv q \bmod 4$.) Ich berechne $A(\alpha,\nu)$ zunächst für gerades ν , dann für ungerades ν .

1.1.) $\nu \equiv 0 \bmod 2$. Im Fall $\nu = 0$ ist $q^\nu = t_\nu = 1$, also $S(\alpha,0) = 1$ und

$$(43) \qquad A(\alpha,0) = c(mq^{2\alpha}) \quad .$$

Im Fall $2 \le \nu \le \alpha$ gilt mit (41) und (42)

$$t_\nu^{-1} S(\alpha,\nu) = q^{-\nu} \sum_{\substack{b \bmod q^\nu \\ q \nmid b}} e(bmq^{-\nu}) =$$

$$= q^{-\nu}\Big[\sum_{b \bmod q^\nu} e(bmq^{-\nu}) - \sum_{b \bmod q^{\nu-1}} e(bqmq^{-\nu}) \Big] =$$

$$= q^{-\nu}\left[q^\nu \delta(mq^{-\nu}) - q^{\nu-1}\delta(mq^{1-\nu})\right] = \delta(mq^{-\nu}) - \frac{1}{q}\delta(mq^{1-\nu}) \quad .$$

Also ist

$$(44) \quad A(\alpha,\nu) = q^{\nu(r-1)}\left[\delta(mq^{-\nu}) - \frac{1}{q}\delta(mq^{1-\nu})\right] c(mq^{2(\alpha-\nu)}) \quad .$$

Sei jetzt $\alpha < \nu \le 2\alpha$, und es gelte zunächst $q^{2(\nu-\alpha)} \mid m$. Im Fall $\nu = 2\alpha$ ist $t_{2\alpha} = 1$ und daher $t_{2\alpha}^{-1} S(\alpha,2\alpha) = 1$;

für $\alpha < \nu < 2\alpha$ folgt mit (41) und (42)

$$t_\nu^{-1} S(\alpha,\nu) = q^{\nu-2\alpha} \sum_{\substack{b \bmod q^{2\alpha-\nu} \\ q \nmid b}} e(bmq^{-\nu}) =$$

$$= q^{\nu-2\alpha} \sum_{\substack{b \bmod q^{2\alpha-\nu} \\ q \nmid b}} e(bmq^{2(\alpha-\nu)} q^{\nu-2\alpha}) =$$

$$= \delta(mq^{-\nu}) - \frac{1}{q}\delta(mq^{1-\nu}) \quad .$$

Daher gilt

$$(45)\quad A(\alpha,\nu) = \begin{cases} q^{2\alpha(r-1)} c(mq^{-2\alpha}) & \nu = 2\alpha \\ q^{\nu(r-1)} \left[\delta(mq^{-\nu}) - \frac{1}{q}\delta(mq^{1-\nu})\right] c(mq^{2(\alpha-\nu)}) & \nu < 2\alpha \,. \end{cases}$$

Formel (45) wurde unter der Voraussetzung $q^{2(\nu-\alpha)} \mid m$ hergeleitet ; sie ist aber auch richtig im Fall $q^{2(\nu-\alpha)} \nmid m$, denn dann ist $c(mq^{2(\alpha-\nu)}) = 0$ und damit nach (37) auch $A(\alpha,\nu) = 0$.

1.2.) $\nu \equiv 1 \bmod 2$. Sei zunächst $\nu \leq \alpha$; mit (41) und (42) gilt

$$S(\alpha,\nu) = \varepsilon(q)\left(\frac{N}{q}\right) \sum_{b \bmod q^\nu} \left(\frac{b}{q}\right) e(bmq^{-\nu}) =$$

$$= \varepsilon(q)\left(\frac{N}{q}\right) \sum_{b_1 \bmod q} \sum_{b_2 \bmod q^{\nu-1}} \left(\frac{b_1+qb_2}{q}\right) e((b_1+qb_2)mq^{-\nu}) =$$

$$= \varepsilon(q)\left(\frac{N}{q}\right) \sum_{b_1 \bmod q} \left(\frac{b_1}{q}\right) e(b_1 mq^{-\nu}) \sum_{b_2 \bmod q^{\nu-1}} e(b_2 mq^{1-\nu}) =$$

$$= \varepsilon(q)\left(\frac{N}{q}\right) q^{\nu-1} \delta(mq^{1-\nu}) \sum_{b_1 \bmod q} \left(\frac{b_1}{q}\right) e(b_1 mq^{-\nu}) \quad .$$

Im Fall $q^{\nu-1} \nmid m$ ist $\delta(mq^{1-\nu}) = S(\alpha,\nu) = 0$. Im Fall $q^{\nu-1} \mid m$ gilt

$$\sum_{b_1 \bmod q} (\frac{b_1}{q}) e(b_1 m q^{-\nu}) = \sum_{b_1 \bmod q} (\frac{b_1}{q}) e(b_1 m q^{1-\nu} q^{-1}) =$$

$$= (\frac{mq^{1-\nu}}{q}) \sqrt{(\frac{-1}{q}) q} \quad .$$

Aus (36) folgt

$$\varepsilon(q) \sqrt{(\frac{-1}{q})} = \begin{cases} 1 = (\frac{-1}{q})^{\lambda} & q \equiv 1 \bmod 4 \\ i(-1)^{\lambda+1} i = (-1)^{\lambda} = (\frac{-1}{q})^{\lambda} & q \equiv -1 \bmod 4 \ ; \end{cases}$$

daher gilt

$$(46) \quad t_\nu^{-1} S(\alpha,\nu) = \delta(mq^{1-\nu}) (\frac{mq^{1-\nu}}{q}) (\frac{-1}{q})^{\lambda} (\frac{N}{q}) q^{-1/2} \quad ,$$

und somit

$$(47) \quad A(\alpha,\nu) = \delta(mq^{1-\nu}) (\frac{mq^{1-\nu}}{q}) (\frac{-1}{q})^{\lambda} (\frac{N}{q}) q^{\nu(r-1) - 1/2} c(mq^{2(\alpha-\nu)}) .$$

Analog zu den Rechnungen unter 1.1.) leitet man (46) und (47) auch für den Fall $\alpha < \nu < 2\alpha$ und $q^{2(\nu-\alpha)} \mid m$ her. Schließlich ist (47) auch richtig, falls $\alpha < \nu < 2\alpha$ und $q^{2(\nu-\alpha)} \nmid m$, da dann $c(mq^{2(\alpha-\nu)}) = A(\alpha,\nu) = 0$ (s. (37)) . Unter Verwendung der Funktion φ aus Definition 1.1 lassen sich die Ergebnisse (43) , (44) , (45) und (47) folgendermaßen zusammenfassen :

(48)
$$A(\alpha,\nu) =$$

$$= \begin{cases} \varphi(q^\nu) c(mq^{2(\alpha-\nu)}) & \nu \in \{0, 2\alpha\} \\ \varphi(q^\nu) \left[\delta(mq^{-\nu}) - \frac{1}{q} \delta(mq^{1-\nu})\right] c(mq^{2(\alpha-\nu)}) & 0 < \nu < 2\alpha , \ \nu \equiv 0 \bmod 2 \\ -\delta(mq^{1-\nu}) (\frac{mq^{1-\nu}}{q}) \varphi(q^\nu) c(mq^{2(\alpha-\nu)}) & 0 < \nu < 2\alpha , \ \nu \equiv 1 \bmod 2 . \end{cases}$$

Aus (39) folgt mit (48)

$$(49) \quad c_1(m) = \sum_{\nu=0}^{2} A(1,\nu) = c(mq^2) - (\frac{m}{q}) \varphi(q) c(m) + \varphi(q^2) c(mq^{-2})$$

(das ist Formel (10|5) aus [10]).

2.) Berechnung von $B(\alpha,\nu)$. Analog zu (48) gilt

(50) $$B(\alpha,\nu) =$$

$$= \begin{cases} \varphi(q^\nu)c_1(mq^{2(\alpha-\nu)}) & \nu \in \{0, 2\alpha\} \\ \varphi(q^\nu)\left[\delta(mq^{-\nu}) - \frac{1}{q}\delta(mq^{1-\nu})\right]c_1(mq^{2(\alpha-\nu)}) & 0 < \nu < 2\alpha,\ \nu \equiv 0 \bmod 2 \\ -\delta(mq^{1-\nu})\left(\frac{mq^{1-\nu}}{q}\right)\varphi(q^\nu)c_1(mq^{2(\alpha-\nu)}) & 0 < \nu < 2\alpha,\ \nu \equiv 1 \bmod 2 \end{cases}$$

(vergl. die Definitionen (37) und (38)) . Formt man die Terme auf der rechten Seite von Gleichung (50) mit Hilfe von (49) um, erhält man eine Beziehung zwischen $B(\alpha,\nu)$, $A(\alpha+1,\nu_1)$ und $A(\alpha-1,\nu_2)$ für gewisse ν_1 und ν_2 . Ich betrachte zunächst die Fälle $\nu = 0$, $\nu = 2\alpha-1$ und $\nu = 2\alpha$; dies genügt zum Beweis von (35) im Fall $\alpha = 1$. Dann berechne ich $B(\alpha,\nu)$ in den übrigen Fällen, d.h. für $1 \le \nu \le 2(\alpha-1)$, und beweise (35) für $\alpha > 1$.

2.1.) $\nu = 0$. Es gilt

(51) $$B(\alpha,0) = c_1(mq^{2\alpha}) =$$

$$= c(mq^{2(\alpha+1)}) - \left(\frac{mq^{2\alpha}}{q}\right)\varphi(q)c(mq^{2\alpha}) + \varphi(q^2)c(mq^{2(\alpha-1)}) =$$

$$= c(mq^{2(\alpha+1)}) + \varphi(q^2)c(mq^{2(\alpha-1)}) = A(\alpha+1,0) + \varphi(q^2)A(\alpha-1,0) .$$

2.2.) $\nu = 2\alpha-1$. In diesem Fall ist

$$B(\alpha,2\alpha-1) = -\delta(mq^{-2(\alpha-1)})\left(\frac{mq^{-2(\alpha-1)}}{q}\right)\varphi(q^{2\alpha-1})c_1(mq^{-2(\alpha-1)}) =$$

$$= -\delta(mq^{-2(\alpha-1)})\left(\frac{mq^{-2(\alpha-1)}}{q}\right)\varphi(q^{2\alpha-1})\Big[c(mq^{-2(\alpha-2)}) -$$

$$- \left(\frac{mq^{-2(\alpha-1)}}{q}\right)\varphi(q)c(mq^{-2(\alpha-1)}) + \varphi(q^2)c(mq^{-2\alpha})\Big] =$$

$$= -\delta(mq^{1-(2\alpha-1)})\left(\frac{mq^{1-(2\alpha-1)}}{q}\right)\varphi(q^{2\alpha-1})c(mq^{2(\alpha+1-(2\alpha-1))}) +$$

$$+ \left[1 - \delta(mq^{1-2\alpha})\right]\frac{1}{q}\varphi(q^2)\varphi(q^{2(\alpha-1)})c(mq^{2(\alpha-1-2(\alpha-1))}) ,$$

denn offenbar gilt

$$\delta(mq^{-2(\alpha-1)})\left[\left(\frac{mq^{-2(\alpha-1)}}{q}\right)\right]^2 c(mq^{-2(\alpha-1)}) =$$

$$= \begin{cases} 0 & q^{2\alpha-1} \mid m \\ c(mq^{-2(\alpha-1)}) & q^{2\alpha-1} \nmid m \end{cases} ,$$

$$\left(\frac{mq^{-2(\alpha-1)}}{q}\right) c(mq^{-2\alpha}) = 0 \quad ,$$

sowie nach Lemma 1.2 (iv) und (v)

$$\varphi(q)\varphi(q^{2\alpha-1}) = (\varphi(q))^2\varphi(q^{2(\alpha-1)}) = \frac{1}{q}\varphi(q^2)\varphi(q^{2(\alpha-1)}) \quad .$$

Daher gilt

(52) $$\tilde{B}(\alpha,2\alpha-1) =$$

$$= A(\alpha+1,2\alpha-1) + \left[1 - \delta(mq^{1-2\alpha})\right]\frac{1}{q}\varphi(q^2)A(\alpha-1,2(\alpha-1)) \quad .$$

2.3.) $\nu = 2\alpha$. Bei der folgenden Umformung benutzt man wieder Lemma 1.2 (v) ; es gilt

(53) $$B(\alpha,2\alpha) = \varphi(q^{2\alpha})c_1(mq^{-2\alpha}) =$$

$$= \varphi(q^{2\alpha})\left[\delta(mq^{-2\alpha})c(mq^{-2(\alpha-1)}) - \left(\frac{mq^{-2\alpha}}{q}\right)\varphi(q)c(mq^{-2\alpha}) + \right.$$

$$\left. + \varphi(q^2)c(mq^{-2(\alpha+1)})\right] =$$

$$= \varphi(q^{2\alpha})\left[\delta(mq^{-2\alpha}) - \frac{1}{q}\delta(mq^{1-2\alpha})\right]c(mq^{2(\alpha+1-2\alpha)}) -$$

$$- \left(\frac{mq^{1-(2\alpha+1)}}{q}\right)\varphi(q^{2\alpha+1})c(mq^{2(\alpha+1-(2\alpha+1))}) +$$

$$+ \varphi(q^{2(\alpha+1)})c(mq^{2(\alpha+1-2(\alpha+1))}) +$$

$$+ \frac{1}{q}\delta(mq^{1-2\alpha})\varphi(q^2)\varphi(q^{2(\alpha-1)})c(mq^{2(\alpha-1-2(\alpha-1))}) =$$

$$= A(\alpha+1,2\alpha) + A(\alpha+1,2\alpha+1) + A(\alpha+1,2(\alpha+1)) +$$

$$+ \frac{1}{q}\varphi(q^2)\delta(mq^{1-2\alpha})A(\alpha-1,2(\alpha-1)) \quad .$$

Für $\alpha = 1$ folgt aus (39), (40) und (51) - (53)

$$C_1(m) = \sum_{\nu=0}^{2} B(1,\nu) = \sum_{\nu=0}^{4} A(2,\nu) + (1+\frac{1}{q})\varphi(q^2)A(0,0) =$$

$$= c_2(m) + \chi(1)\varphi(q^2)c_0(m)$$

(es ist $A(0,0) = c_0(m) = c(m)$) ; damit ist (35) für $\alpha = 1$ bewiesen.

Sei jetzt $\alpha > 1$. In den noch verbleibenden Fällen, d.h. für $1 \le \nu \le 2(\alpha-1)$, erhält man für $B(\alpha,\nu)$ ohne Schwierigkeiten folgendes Ergebnis :

$$(54)\quad B(\alpha,\nu) = A(\alpha+1,\nu) + \varphi(q^2)A(\alpha-1,\nu) \quad , \quad 1 \le \nu < 2(\alpha-1) \ ,$$

$$(55)\quad B(\alpha,2(\alpha-1)) = A(\alpha+1,2(\alpha-1)) + (1-\frac{1}{q})\varphi(q^2)A(\alpha-1,2(\alpha-1))$$

(man benutzt dabei die Gleichung

$$\delta(mq^{1-\nu})(\frac{mq^{2(\alpha-\nu)}}{q}) = 0 \quad , \quad 1 \le \nu \le 2(\alpha-1) \quad).$$

Mit (39) , (40) und (51) - (55) gilt

$$C_\alpha(m) = \sum_{\nu=0}^{2\alpha} B(\alpha,\nu) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{2(\alpha+1)} A(\alpha+1,\nu) + \varphi(q^2) \sum_{\nu=0}^{2(\alpha-1)} A(\alpha-1,\nu) =$$

$$= c_{\alpha+1}(m) + \varphi(q^2)c_{\alpha-1}(m) \quad .$$

Damit ist (35) auch für $\alpha > 1$ bewiesen.

Aus Lemma 3.1 folgt, daß die Operatoren $T(n^2)$ keiner Multiplikationsformel von der Art genügen, wie sie für die Fourierkoeffizienten einer Eigenform gilt. Vergleicht man Formel (1) (ein Spezialfall von Satz 1.5) und Lemma 3.1 , stellt man folgenden Unterschied fest : Während es in (1) zu jedem gemeinsamen Teiler d von m^2 und n^2 einen Summanden $\varphi(d)c(\frac{m^2n^2}{d^2})$ gibt, fehlt in (34) ein Summand zum Teiler q (die Zahlen $q^{2\alpha}$ und q^2 haben die gemeinsamen Teiler 1 , q und q^2) ; außerdem tritt in (34) für $\alpha = 1$ noch der Faktor $\chi(1) = 1+\frac{1}{q}$ auf. Indem man

geeignete Linearkombinationen der $T(n^2)$ bildet, lassen sich jedoch Operatoren $\tilde{T}(n^2)$ definieren, die eine Multiplikationsformel nach Art von (1) erfüllen :

$$\tilde{T}(m^2)\tilde{T}(n^2) = \sum_{d|(m^2,n^2)} \varphi(d)\tilde{T}\left(\frac{m^2n^2}{d^2}\right) \quad ,$$

wobei $m, n \in \mathbb{N}$, $(mn,N) = 1$ (s. Definition 3.2, Satz 3.6). Hinsichtlich ihres multiplikativen Verhaltens entsprechen die Operatoren $\tilde{T}(n^2)$ damit den gewöhnlichen Hecke-Operatoren : Z.B. gilt für die Hecke-Operatoren T_n auf dem Raum der Spitzenformen geraden Gewichts -r zur vollen Modulgruppe

$$T_m T_n = \sum_{d|(m,n)} d^{r-1} T_{\frac{mn}{d^2}} \quad ;$$

der Funktion φ entspricht hier die Funktion $d \mapsto d^{r-1}$. (Für eine zu N teilerfremde Quadratzahl d^2 gilt übrigens $\varphi(d^2) = (d^2)^{1/2-1}$, und $-\frac{1}{2}$ ist gerade das Gewicht der Modulformen, auf denen die Operatoren $\tilde{T}(n^2)$ definiert sind.)

Definition 3.2. Es sei ψ die in Definition 1.1 erklärte Funktion; für $n \in \mathbb{N}$ mit $(n,N) = 1$ sei dann

$$\tilde{T}(n^2) := \sum_{d|n} \psi(d) T\left(\frac{n^2}{d^2}\right) \quad .$$

Ich beweise jetzt einige spezielle Multiplikationsformeln (Lemma 3.3, 3.4, 3.5), die zur Vorbereitung von Satz 3.6 dienen.

Lemma 3.3. Für eine Primzahl q mit $q \nmid N$ und $\alpha \in \mathbb{N}$ gilt

$$\tilde{T}(q^{2\alpha})\tilde{T}(q^2) = \sum_{\nu=0}^{2} \varphi(q^\nu)\tilde{T}(q^{2(\alpha+1-\nu)}) \quad .$$

Beweis. Indem man für $\tilde{T}(q^{2\alpha})$ die Definition 3.2 einsetzt und Lemma 3.1 sowie Lemma 1.2 benutzt, erhält man die Gleichung

$$\tilde{T}(q^{2\alpha})T(q^2) = \tilde{T}(q^{2(\alpha+1)}) + \varphi(q^2)\tilde{T}(q^{2(\alpha-1)}) \quad .$$

Mit Definition 3.2 und Lemma 1.2 (iii) folgt

$$\tilde{T}(q^{2\alpha})\tilde{T}(q^2) = \tilde{T}(q^{2\alpha})\left[T(q^2) + \psi(q)T(1)\right] =$$

$$= \tilde{T}(q^{2(\alpha+1)}) + \varphi(q)\tilde{T}(q^{2\alpha}) + \varphi(q^2)\tilde{T}(q^{2(\alpha-1)})$$

(offenbar gilt $\tilde{T}(q^{2\alpha})T(1) = \tilde{T}(q^{2\alpha})$) .

Lemma 3.4. Für eine Primzahl q mit $q \nmid N$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ gilt

$$\tilde{T}(q^{2\alpha})\tilde{T}(q^{2\beta}) = \sum_{\nu=0}^{2\gamma} \varphi(q^\nu)\tilde{T}(q^{2(\alpha+\beta-\nu)}) \quad ,$$

wobei $\gamma := \min\{\alpha, \beta\}$.

Beweis. Ich beweise das Lemma durch Induktion über β . Für den Induktionsanfang $\beta = 1$ folgt die Behauptung aus Lemma 3.3 .

Sei jetzt $\beta \geq 2$, und die Behauptung sei bereits bewiesen für alle $\beta' < \beta$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt zunächst

$$\tilde{T}(q^{2\alpha})\tilde{T}(q^{2\beta}) = \tilde{T}(q^{2\alpha})\left[\tilde{T}(q^2)\tilde{T}(q^{2(\beta-1)}) - \varphi(q)\tilde{T}(q^{2(\beta-1)}) - \right.$$

$$\left. - \varphi(q^2)\tilde{T}(q^{2(\beta-2)})\right] =$$

$$= \tilde{T}(q^{2(\alpha+1)})\tilde{T}(q^{2(\beta-1)}) + \varphi(q^2)\tilde{T}(q^{2(\alpha-1)})\tilde{T}(q^{2(\beta-1)}) -$$

$$- \varphi(q^2)\tilde{T}(q^{2\alpha})\tilde{T}(q^{2(\beta-2)}) \quad .$$

Sei $\gamma_1 := \min\{\alpha+1, \beta-1\}$; man wendet nochmals die Induktionsvoraussetzung sowie Lemma 1.2 (v) an und erhält

$$\tilde{T}(q^{2\alpha})\tilde{T}(q^{2\beta}) = \sum_{\nu=0}^{2\gamma_1} \varphi(q^\nu)\tilde{T}(q^{2(\alpha+\beta-\nu)}) -$$

$$- \varphi(q^2) \sum_{\nu=0}^{2(\gamma_1-1)} \varphi(q^\nu)\tilde{T}(q^{2(\alpha+\beta-2-\nu)}) +$$

$$+ \varphi(q^2) \sum_{\nu=0}^{2(\gamma-1)} \varphi(q^\nu)\tilde{T}(q^{2(\alpha+\beta-2-\nu)}) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{2\gamma_1} \varphi(q^\nu)\tilde{T}(q^{2(\alpha+\beta-\nu)}) - \sum_{\nu=2}^{2\gamma_1} \varphi(q^\nu)\tilde{T}(q^{2(\alpha+\beta-\nu)}) +$$

$$+\sum_{\nu=2}^{2\gamma}\varphi(q^\nu)\tilde{T}(q^{2(\alpha+\beta-\nu)}) = \sum_{\nu=0}^{2\gamma}\varphi(q^\nu)\tilde{T}(q^{2(\alpha+\beta-\nu)}) \quad .$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Lemma 3.5. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $(mn,N) = (m,n) = 1$; dann gilt

$$T(m^2)T(n^2) = T(m^2n^2) \quad , \tag{56}$$

$$\tilde{T}(m^2)\tilde{T}(n^2) = \tilde{T}(m^2n^2) \quad . \tag{57}$$

Beweis. Gleichung (56) folgt aus [10] , Satz 2 . Gleichung (57) ist eine leichte Folgerung aus (56) und Definition 3.2 .

Satz 3.6. Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $(mn,N) = 1$ gilt

$$\tilde{T}(m^2)\tilde{T}(n^2) = \sum_{d|(m^2,n^2)}\varphi(d)\tilde{T}\left(\frac{m^2n^2}{d^2}\right) \quad .$$

Beweis. Man führt den Beweis mit Hilfe von Lemma 3.4 und Formel (57) ähnlich wie den Beweis von Satz 1.5 .

Die Operatoren $T(n^2)$ lassen sich folgendermaßen aus den $\tilde{T}(n^2)$ zurückgewinnen : Für $n \in \mathbb{N}$ mit $(n,N) = 1$ gilt

$$T(n^2) = \sum_{d|n}\mu(d)\psi(d)\tilde{T}\left(\frac{n^2}{d^2}\right) \quad . \tag{58}$$

Beweis. Es ist

$$\sum_{d|n}\mu(d)\psi(d)\tilde{T}\left(\frac{n^2}{d^2}\right) = \sum_{d|n}\mu(d)\psi(d)\sum_{t|\frac{n}{d}}\psi(t)T\left(\frac{n^2}{d^2t^2}\right) =$$

$$= \sum_{d|n}\mu(d)\psi(d)\sum_{t|\frac{n}{d}}\psi\left(\frac{n}{dt}\right)T(t^2) = \sum_{d|n}\mu(d)\sum_{t|\frac{n}{d}}\psi\left(\frac{n}{t}\right)T(t^2) =$$

$$= \sum_{t|n}\psi\left(\frac{n}{t}\right)T(t^2)\sum_{d|\frac{n}{t}}\mu(d) = \psi\left(\frac{n}{n}\right)T(n^2) = T(n^2) \quad .$$

Mit Hilfe von Lemma 3.4 und (58) beweise ich jetzt

eine Multiplikationsformel für die Operatoren $T(n^2)$.
Für $m, n, t \in \mathbb{N}$ mit $t \mid (m,n)$ sei noch

$$\left[\frac{m,n}{t}\right] := \Big(\prod_{\substack{p \mid t,\, p \text{ prim} \\ p \nmid (\frac{m}{t}, \frac{n}{t})}} (1-\tfrac{1}{p})\Big) \prod_{\substack{p \mid t,\, p \text{ prim} \\ p \nmid mnt^{-2}}} (1+\tfrac{1}{p}) \ .$$

Satz 3.7. Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $(mn,N) = 1$ gilt

$$T(m^2)T(n^2) = \sum_{d \mid (m,n)} \varphi(d^2) \left[\frac{m,n}{d}\right] T\left(\frac{m^2n^2}{d^4}\right) \ .$$

Beweis. Ich betrachte zuerst den Spezialfall $m = q^\alpha$ und $n = q^\beta$ mit einer Primzahl q, $q \nmid N$, und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Zunächst gelte $\alpha \neq \beta$, und es sei $\gamma := \min\{\alpha, \beta\}$. Aus Lemma 3.4 und (58) folgt

$$T(q^{2\alpha})T(q^{2\beta}) =$$

$$= \left[\tilde{T}(q^{2\alpha}) - \psi(q)\tilde{T}(q^{2(\alpha-1)})\right] \cdot \left[\tilde{T}(q^{2\beta}) - \psi(q)\tilde{T}(q^{2(\beta-1)})\right] =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{2\gamma} \varphi(q^\nu)\tilde{T}(q^{2(\alpha+\beta-\nu)}) - \psi(q) \sum_{\nu=0}^{2\gamma} \varphi(q^\nu)\tilde{T}(q^{2(\alpha+\beta-1-\nu)}) -$$

$$- \psi(q)\Big[\sum_{\nu=0}^{2(\gamma-1)} \varphi(q^\nu)\tilde{T}(q^{2(\alpha+\beta-1-\nu)}) -$$

$$- \psi(q) \sum_{\nu=0}^{2(\gamma-1)} \varphi(q^\nu)\tilde{T}(q^{2(\alpha+\beta-2-\nu)})\Big] =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{2\gamma} \varphi(q^\nu)T(q^{2(\alpha+\beta-\nu)}) - \psi(q) \sum_{\nu=0}^{2(\gamma-1)} \varphi(q^\nu)T(q^{2(\alpha+\beta-1-\nu)}) =$$

$$= T(q^{2(\alpha+\beta)}) + \sum_{\nu=1}^{2\gamma-1} \left[\varphi(q^\nu) - \psi(q)\varphi(q^{\nu-1})\right] T(q^{2(\alpha+\beta-\nu)}) +$$

$$+ \varphi(q^{2\gamma})T(q^{2(\alpha+\beta-2\gamma)}) \ .$$

Aus Lemma 1.2 folgt für $\nu \in \mathbb{N}$

$$\psi(q)\varphi(q^{\nu-1}) = \begin{cases} \varphi(q^\nu) & \nu \equiv 1 \bmod 2 \\ \frac{1}{q}\varphi(q^\nu) & \nu \equiv 0 \bmod 2 \end{cases} ;$$

ferner gilt

$$\begin{bmatrix} q^{\alpha}, q^{\beta} \\ q^{\nu} \end{bmatrix} = \begin{cases} 1 & \nu = 0 \\ 1-\frac{1}{q} & 1 \le \nu \le \gamma-1 \\ 1 & \nu = \gamma \end{cases} .$$

Daher folgt

$$T(q^{2\alpha})T(q^{2\beta}) = \sum_{\nu=0}^{\gamma} \varphi(q^{2\nu}) \begin{bmatrix} q^{\alpha}, q^{\beta} \\ q^{\nu} \end{bmatrix} T(q^{2(\alpha+\beta-2\nu)}) ,$$

womit die Behauptung für diesen Fall bewiesen ist. Den Fall $\alpha = \beta$ beweist man ähnlich. Den allgemeinen Fall, daß m und n mehrere Primfaktoren haben, führt man mit Hilfe von (56) auf den obigen Spezialfall zurück.

§4. Allgemeine Multiplikationsformeln

In diesem Paragraphen seien R und S zwei Ringe, S sei kommutativ und habe ein Einselement 1 ; ferner sei R ein unitärer S-Linksmodul, und für alle $s \in S$ und r_1, $r_2 \in R$ gelte $s(r_1 r_2) = (sr_1)r_2 = r_1(sr_2)$. Weiter sei $\mathbb{N}^*$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit der folgenden Eigenschaft : Sind $a, b \in \mathbb{N}^*$ und $d \in \mathbb{N}$ mit $d|a$, so ist $ab \in \mathbb{N}^*$ und $d \in \mathbb{N}^*$ .Schließlich seien

$$\Phi : \mathbb{N}^* \longrightarrow S$$

und

$$A : \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}^*\} \longrightarrow R$$

zwei Abbildungen mit

$$A(m^2)A(n^2) = \sum_{d|(m^2,n^2)} \Phi(d) A\left(\frac{m^2 n^2}{d^2}\right) \tag{59}$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}^*$. Eine solche Abbildung A heißt Φ - multiplikativ.

Der vorige Paragraph liefert ein Beispiel für eine Multiplikationsformel vom Typ (59) : Seien $S := \mathbb{C}$, R der Endomorphismenring des $\mathbb{C}$ - Vektorraums $\{\Gamma_0^0[N], -\frac{1}{2}, \varkappa_1\}$ und $\mathbb{N}^* := \{n \in \mathbb{N} \mid (n,N) = 1\}$; nach Satz 3.6 ist die Abbildung $\tilde{T} : \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}^*\} \longrightarrow R$ φ - multiplikativ.

Da die Funktion φ gewisse multiplikative Eigenschaften besitzt (s. Lemma 1.2 (ii), (v)), liegt die Frage nahe, ob sich mit Hilfe von Formel (59) auch für Φ solche Eigenschaften nachweisen lassen; ferner ist es interessant zu wissen, ob es etwa noch weitere Abbildungen $\Phi' : \mathbb{N}^* \longrightarrow S$ derart gibt, daß A ebenfalls Φ'-multiplikativ ist. Diese beiden Probleme sollen jetzt untersucht werden.

Von der Abbildung Φ setze ich noch voraus

$$\Phi(1) = 1$$

(auch die Funktion φ erfüllt diese Forderung); dann gilt für alle teilerfremden Zahlen $m, n \in \mathbb{N}^*$

$$A(m^2)A(n^2) = \Phi(1)A(m^2n^2) = A(m^2n^2) \quad .$$

Die Lösung der beiden eben angesprochenen Probleme beruht auf Satz 4.2, zu dessen Beweis ich das folgende Lemma benötige.

Lemma 4.1. Die oben genannten Voraussetzungen seien erfüllt, und es seien $a, b \in \mathbb{N}^*$. Es gebe eine Primzahl p und ein $\nu \in \mathbb{N}$ mit $a = p^{\nu-1}a_1$, $b = p^{\nu}b_1$, wobei $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$, $p \nmid a_1 b_1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $p|n$ und $n|b$ gilt dann

$$\sum_{d|n} \mu(d)A(a^2d^2)A\left(\frac{b^2}{d^2}\right) = 0 \quad .$$

Beweis. Sei $n = p^{\alpha}n_1$ mit $\alpha, n_1 \in \mathbb{N}$ und $p \nmid n_1$; es gilt

$$\sum_{d|n} \mu(d)A(a^2d^2)A\left(\frac{b^2}{d^2}\right) =$$

$$= \sum_{p\nmid d|n} \mu(d)A(a^2d^2)A\left(\frac{b^2}{d^2}\right) + \sum_{p|d|n} \mu(d)A(a^2d^2)A\left(\frac{b^2}{d^2}\right) =$$

$$= \sum_{d|n_1} \left[\mu(d)A(a^2d^2)A\left(\frac{b^2}{d^2}\right) + \mu(pd)A(a^2p^2d^2)A\left(\frac{b^2}{p^2d^2}\right)\right] =$$

$$= \sum_{d|n_1} \mu(d)\left[A(p^{2\nu-2}a_1^2d^2)A\left(\frac{p^{2\nu}b_1^2}{d^2}\right) - A(p^{2\nu}a_1^2d^2)A\left(\frac{p^{2\nu-2}b_1^2}{d^2}\right)\right] =$$

$$= \sum_{d|n_1} \mu(d)A(p^{2\nu-2})A(p^{2\nu})\left[A(a_1^2d^2)A(\frac{b_1^2}{d^2}) - A(a_1^2d^2)A(\frac{b_1^2}{d^2})\right] = 0 \ .$$

Satz 4.2. Seien R, S, $\mathbb{N}^*$, A und Φ wie oben angegeben; für $m, n \in \mathbb{N}^*$ mit $m|n^\infty$ gilt dann

$$\Phi(m) \sum_{d|n} \mu(d)A(n^2d^2)A(\frac{n^2}{d^2}) =$$

$$= \sum_{d|m} \mu(d)A(\frac{k(m)m}{d^2}) \sum_{\substack{s|k(m) \\ t|n,(t,k(m))=1}} \mu(st)A(\frac{n^2t^2}{s^2})A(\frac{mn^2d^2s^2}{k(m)t^2}) \ . \tag{60}$$

Beweis. Zuerst einige Bemerkungen :

(i) Für $d^2 \nmid k(m)m$ ist $A(\frac{k(m)m}{d^2})$ zunächst nicht definiert, man setze etwa $A(\frac{k(m)m}{d^2}) := 0$; diese Schwierigkeit ist aber belanglos, da für $d|m$ und $d^2 \nmid k(m)m$ ohnehin $\mu(d) = 0$ ist.

(ii) Aus $m|n^\infty$, $t|n$ und $(t,k(m)) = 1$ folgt $(k(m))^2 \Big| \frac{n^2}{t^2}$, also auch $k(m) \Big| \frac{n^2}{k(m)t^2}$. Daher gilt für $d|m$ mit $\mu(d) \neq 0$

$$\frac{k(m)m}{d^2} \Big| \frac{mn^2d^2s^2}{k(m)t^2} \ .$$

(iii) Es sei $n = n_1n_2$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $(n_1,n_2) = 1$, $k(m)|n_1$ und $n_1|(k(m))^\infty$; dann gilt

$$\sum_{\substack{s|k(m) \\ t|n,(t,k(m))=1}} \mu(st)A(\frac{n^2t^2}{s^2})A(\frac{mn^2d^2s^2}{k(m)t^2}) =$$

$$= \sum_{s|n_1,\, t|n_2} \mu(st)A(\frac{n^2t^2}{s^2})A(\frac{mn^2d^2s^2}{k(m)t^2}) \ .$$

Die Summe auf der rechten Seite von Gleichung (60) wird mittels (59) unter Beachtung von Bemerkung (ii) und (iii) umgeformt :

$$\sum_{d|m} \mu(d)A(\frac{k(m)m}{d^2}) \sum_{\substack{s|k(m) \\ t|n,(t,k(m))=1}} \mu(st)A(\frac{n^2t^2}{s^2})A(\frac{mn^2d^2s^2}{k(m)t^2}) =$$

$$= \sum_{s|n_1,\, t|n_2} \mu(st) A\left(\frac{n^2t^2}{s^2}\right) \sum_{d|m} \mu(d) A\left(\frac{k(m)m}{d^2}\right) A\left(\frac{mn^2d^2s^2}{k(m)t^2}\right) =$$

$$= \sum_{s|n_1,\, t|n_2} \mu(st) A\left(\frac{n^2t^2}{s^2}\right) \sum_{d|m} \mu(d) \sum_{v|k(m)md^{-2}} \Phi(v) A\left(\frac{m^2n^2s^2}{t^2v^2}\right) =$$

$$= \sum_{v|k(m)m} \Phi(v) \Big[\sum_{d^2 \left| \frac{k(m)m}{v} \right.} \mu(d) \Big] \sum_{s|n_1,\, t|n_2} \mu(st) A\left(\frac{n^2t^2}{s^2}\right) A\left(\frac{m^2n^2s^2}{t^2v^2}\right) .$$

Ich zeige jetzt

$$(61) \quad \Big[\sum_{d^2 \left| \frac{k(m)m}{v} \right.} \mu(d) \Big] \sum_{s|n_1,\, t|n_2} \mu(st) A\left(\frac{n^2t^2}{s^2}\right) A\left(\frac{m^2n^2s^2}{t^2v^2}\right) = 0 ,$$

falls $v \mid k(m)m$ und $v \neq m$. Für $a \in \mathbb{N}$ gilt offenbar $\sum_{d^2|a} \mu(d) = (\mu(a))^2$. Sei nun v ein Teiler von $k(m)m$ mit $(\mu(\frac{k(m)m}{v}))^2 = 1$, und es sei $\frac{k(m)m}{v} = m_1 m_2$, wobei $m_1 , m_2 \in \mathbb{N}$, $m_1 \mid k(m)$ und $(m_1, m_2) = 1$. Dann gilt

$$\sum_{s|n_1,\, t|n_2} \mu(st) A\left(\frac{n^2t^2}{s^2}\right) A\left(\frac{m^2n^2s^2}{t^2v^2}\right) =$$

$$= \sum_{s|n_1,\, t|n_2} \mu(st) A\left(\frac{n_1^2n_2^2t^2}{s^2}\right) A\left(\frac{m_1^2m_2^2n_1^2n_2^2s^2}{(k(m))^2t^2}\right) =$$

$$= \sum_{s|n_1,\, t|n_2} \mu(s)\mu(t) A\left(\frac{n_1^2}{s^2}\right) A(n_2^2t^2) A\left(\frac{m_1^2n_1^2s^2}{(k(m))^2}\right) A\left(\frac{m_2^2n_2^2}{t^2}\right) =$$

$$= \Big[\sum_{s|n_1} \mu(s) A\left(\frac{m_1^2n_1^2s^2}{(k(m))^2}\right) A\left(\frac{n_1^2}{s^2}\right) \Big] \sum_{t|n_2} \mu(t) A(n_2^2t^2) A\left(\frac{m_2^2n_2^2}{t^2}\right) .$$

Aus Lemma 4.1 folgt

$$\sum_{s|n_1} \mu(s) A\left(\frac{m_1^2n_1^2s^2}{(k(m))^2}\right) A\left(\frac{n_1^2}{s^2}\right) = 0 \quad , \quad \text{falls } \frac{k(m)}{m_1} > 1 \quad ,$$

$$\sum_{t|n_2} \mu(t) A(n_2^2t^2) A\left(\frac{m_2^2n_2^2}{t^2}\right) = 0 \quad , \quad \text{falls } m_2 > 1 \quad .$$

Im Fall $\frac{k(m)}{m_1} = m_2 = 1$ ist $\frac{k(m)m}{v} = m_1 = k(m)$, also $v = m$.

Damit ist (61) gezeigt, und es folgt

$$\sum_{v|k(m)m} \Phi(v)\Big[\sum_{d^2\left|\frac{k(m)m}{v}\right.} \mu(d)\Big] \sum_{s|n_1,\, t|n_2} \mu(st)A\Big(\frac{n^2t^2}{s^2}\Big)A\Big(\frac{m^2n^2s^2}{t^2v^2}\Big) =$$

$$= \Phi(m)\Big[\sum_{s|n_1} \mu(s)A(n_1^2s^2)A\Big(\frac{n_1^2}{s^2}\Big)\Big] \sum_{t|n_2} \mu(t)A(n_2^2t^2)A\Big(\frac{n_2^2}{t^2}\Big) =$$

$$= \Phi(m) \sum_{s|n_1,\, t|n_2} \mu(st)A(n_1^2n_2^2s^2t^2)A\Big(\frac{n_1^2n_2^2}{s^2t^2}\Big) =$$

$$= \Phi(m) \sum_{d|n} \mu(d)A(n^2d^2)A\Big(\frac{n^2}{d^2}\Big) \quad .$$

Damit ist Satz 4.2 bewiesen.

Korollar 4.3. Die Voraussetzungen von Satz 4.2 seien erfüllt, und es seien $m, n \in \mathbb{N}^*$ mit $m|n^\infty$. Dann gilt

(62)
$$\Phi(m^2) \sum_{d|n} \mu(d)A(n^2d^2)A\Big(\frac{n^2}{d^2}\Big) =$$
$$= \sum_{d|m} \mu(d)A\Big(\frac{m^2}{d^2}\Big) \sum_{t|n} \mu(t)A(n^2t^2)A\Big(\frac{m^2n^2d^2}{t^2}\Big) \quad ;$$

im Fall $m|(k(m))^\infty$ gilt ferner

(63)
$$\Phi(m) \sum_{d|n} \mu(d)A(n^2d^2)A\Big(\frac{n^2}{d^2}\Big) =$$
$$= \sum_{d|m} \mu(d)A\Big(\frac{k(m)m}{d^2}\Big) \sum_{s|n} \mu(s)A\Big(\frac{mn^2d^2s^2}{k(m)}\Big)A\Big(\frac{n^2}{s^2}\Big) \quad .$$

Beweis. Wegen $k(m^2) = 1$ folgt aus (60)

$$\Phi(m^2) \sum_{d|n} \mu(d)A(n^2d^2)A\Big(\frac{n^2}{d^2}\Big) =$$

$$= \sum_{d|m^2} \mu(d)A\Big(\frac{m^2}{d^2}\Big) \sum_{t|n} \mu(t)A(n^2t^2)A\Big(\frac{m^2n^2d^2}{t^2}\Big) \quad .$$

Für einen Teiler d von m^2 mit $d \nmid m$ ist $\mu(d) = 0$; daher braucht nur über alle Teiler d von m summiert zu wer-

den, womit (62) bewiesen ist. Gelte nun $m|(k(m))^\infty$ und $d|m$; sind n_1 und n_2 wie in Bemerkung (iii) zu Satz 4.2 definiert, so folgt

$$\sum_{s|n_1,t|n_2} \mu(st)A(\frac{n^2t^2}{s^2})A(\frac{mn^2d^2s^2}{k(m)t^2}) =$$

$$= \sum_{s|n_1,t|n_2} \mu(st)A(\frac{n_1^2}{s^2})A(n_2^2t^2)A(\frac{mn_1^2d^2s^2}{k(m)})A(\frac{n_2^2}{t^2}) =$$

$$= \sum_{s|n_1,t|n_2} \mu(st)A(\frac{mn_1^2n_2^2d^2s^2t^2}{k(m)})A(\frac{n_1^2n_2^2}{s^2t^2}) =$$

$$= \sum_{s|n} \mu(s)A(\frac{mn^2d^2s^2}{k(m)})A(\frac{n^2}{s^2}) \quad .$$

Damit folgt (63) aus (60) .

Korollar 4.4. Die Voraussetzungen von Satz 4.2 seien erfüllt. Für m_1 , m_2 , $n \in \mathbb{N}^*$ mit $(m_1,m_2) = 1$ und $m_1m_2|n^\infty$ gilt dann

$$(64) \quad \left[\phi(m_1m_2) - \phi(m_1)\,\phi(m_2)\right]\sum_{d|n}\mu(d)A(n^2d^2)A(\frac{n^2}{d^2}) = 0 \; .$$

Für eine Primzahl $q \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ mit $q|n$ und $\nu \in \mathbb{N}$ gilt

$$(65) \quad \left[\phi(q^{\nu+2}) - \phi(q^\nu)\,\phi(q^2)\right]\sum_{d|n}\mu(d)A(n^2d^2)A(\frac{n^2}{d^2}) = 0 \; .$$

Beweis. Formel (64) folgt aus (60) , indem man ausnutzt, daß die Abbildungen μ , k und A multiplikativ sind. Seien jetzt q , n und ν wie in der Behauptung angegeben. Für gerades ν und $d|n$ gilt

$$A(q^{\nu+2})A(\frac{q^{\nu+2}n^2}{d^2}) - A(q^\nu)A(\frac{q^{\nu+4}n^2}{d^2}) =$$

$$= \phi(q^2)\left[A(q^\nu)A(\frac{q^\nu n^2}{d^2}) - A(q^{\nu-2})A(\frac{q^{\nu+2}n^2}{d^2})\right] \quad ;$$

mit (62) folgt daher

$$\phi(q^{\nu+2})\sum_{d|n}\mu(d)A(n^2d^2)A(\frac{n^2}{d^2}) =$$

$$= A(q^{\nu+2}) \sum_{d|n} \mu(d)A(n^2d^2)A(\frac{q^{\nu+2}n^2}{d^2}) -$$

$$- A(q^{\nu}) \sum_{d|n} \mu(d)A(n^2d^2)A(\frac{q^{\nu+4}n^2}{d^2}) =$$

$$= \Phi(q^2)\Big[A(q^{\nu}) \sum_{d|n} \mu(d)A(n^2d^2)A(\frac{q^{\nu}n^2}{d^2}) -$$

$$- A(q^{\nu-2}) \sum_{d|n} \mu(d)A(n^2d^2)A(\frac{q^{\nu+2}n^2}{d^2})\Big] =$$

$$= \Phi(q^2)\Phi(q^{\nu}) \sum_{d|n} \mu(d)A(n^2d^2)A(\frac{n^2}{d^2}) \quad .$$

Für ungerades ν beweist man (65) auf ähnliche Weise, indem man (63) benutzt.

Folgerung 4.5. Es gebe zu jedem $m \in \mathbb{N}^*$ ein $n \in \mathbb{N}^*$ mit $m|n^{\infty}$ derart, daß das Element $\sum_{d|n} \mu(d)A(n^2d^2)A(\frac{n^2}{d^2}) \in R$ nur vom Nullelement $\in S$ annulliert wird; dann gilt :

(i) Ist A auch Φ'- multiplikativ für eine Abbildung $\Phi' : \mathbb{N}^* \longrightarrow S$ mit $\Phi'(1) = 1$, so ist $\Phi' = \Phi$.

(ii) Φ ist multiplikativ, und für jede Primzahl $q \in \mathbb{N}^*$ und $\nu \in \mathbb{N}$ ist $\Phi(q^{\nu+2}) = \Phi(q^{\nu})\Phi(q^2)$. (Das sind jene multiplikativen Eigenschaften, die auch φ besitzt, s. Lemma 1.2 (ii),(v)) .

Beweis. Seien m , n und Φ' wie angegeben; aus Satz 4.2 folgt

$$\Big[\Phi(m) - \Phi'(m)\Big] \sum_{d|n} \mu(d)A(n^2d^2)A(\frac{n^2}{d^2}) = 0 \quad ,$$

also $\Phi(m) = \Phi'(m)$. Behauptung (ii) folgt aus Korollar 4.4 .

Die bisher erreichten Ergebnisse wende ich jetzt auf die in §3 definierten Operatoren $\tilde{T}(n^2)$ an und gebe Beispiele, wann die Voraussetzungen von Folgerung 4.5 erfüllt sind.

Satz 4.6. Seien l, N, φ, $T(n^2)$, $\tilde{T}(n^2)$ wie in §3, und es gelte $l > 3$. $\tilde{T}$ sei Φ-multiplikativ für eine Abbildung $\Phi : \{ n \in \mathbb{N} \mid (n,N) = 1 \} \longrightarrow \mathbb{C}$. Es gebe eine Eigenform $f \in \{ \Gamma_0^0[N], -\frac{1}{2}, \varkappa_1 \}$ aller $T(q^2)$, q Primzahl mit $q \nmid N$, in deren Fourierentwicklung der konstante Term $c(0) = 1$ ist. Dann gilt $\Phi = \varphi$.

Beweis. Aus $\tilde{T}(1)\tilde{T}(1) = \Phi(1)\tilde{T}(1)$ folgt $\Phi(1) = 1$, denn $\tilde{T}(1) = T(1)$ ist der Einsoperator auf dem Raum $\{ \Gamma_0^0[N], -\frac{1}{2}, \varkappa_1 \}$. Daher lassen sich die vorangehenden Überlegungen auf Φ anwenden. Ist q eine Primzahl mit $q \nmid N$, so ist f eine Eigenform von $T(q^2)$ zum Eigenwert

$$C(0) = c(0) + q^{1-2}c(0) = q^{1-2} + 1$$

($C(0)$ ist der konstante Term in der Fourierentwicklung von $T(q^2)f$, vergl. Formel (7) im Beweis von Lemma 1.3). Es folgt

$$\Big[\sum_{d \mid q} \mu(d) \tilde{T}(q^2 d^2) \tilde{T}\Big(\frac{q^2}{d^2}\Big) \Big] f =$$

$$= \Big[(\tilde{T}(q^2))^2 - \tilde{T}(q^4) \Big] f = \Big[\varphi(q)\tilde{T}(q^2) + \varphi(q^2)\tilde{T}(1) \Big] f =$$

$$= \Big[\varphi(q)T(q^2) + (\varphi(q))^2 T(1) + \varphi(q^2)T(1) \Big] f =$$

$$= \Big[-\Big(\frac{-1}{q}\Big)^{(l-1)/2} \Big(\frac{N}{q}\Big) q^{(l-3)/2} (q^{l-2}+1) + q^{l-3} + q^{l-2} \Big] f =: \omega_q f ,$$

und es ist $\omega_q \neq 0$, denn wegen $l > 3$ gilt

$$q^{l-3} \nmid \Big(\frac{-1}{q}\Big)^{(l-1)/2} \Big(\frac{N}{q}\Big) q^{(l-3)/2} .$$

Ist $m \in \mathbb{N}$ mit $(m,N) = 1$, und ist n das Produkt aller Primzahlen, die m teilen, so gilt $m \mid n^\infty$ und

$$\Big[\sum_{d \mid n} \mu(d) \tilde{T}(n^2 d^2) \tilde{T}\Big(\frac{n^2}{d^2}\Big) \Big] f =$$

$$= \Big[\prod_{\substack{q \mid m \\ q \text{ prim}}} \sum_{d \mid q} \mu(d) \tilde{T}(q^2 d^2) \tilde{T}\Big(\frac{q^2}{d^2}\Big) \Big] f = \Big(\prod_{\substack{q \mid m \\ q \text{ prim}}} \omega_q \Big) f \neq 0 .$$

Daher ist $\sum_{d|n} \mu(d)\tilde{T}(n^2d^2)\tilde{T}(\frac{n^2}{d^2})$ nicht der Nulloperator, und aus 4.5 (i) folgt damit $\Phi = \varphi$.

Beispiel 4.7. Die Voraussetzungen von Satz 4.6 sind insbesondere erfüllt im Fall $N = 4$ und $l \in \{5, 7\}$, denn die Modulformen $f_{5,0}$ bzw. $f_{7,0}$ sind jeweils Eigenformen aller $T(q^2)$, und ihre Fourierentwicklungen beginnen mit dem konstanten Term $a_5(0,0) = a_7(0,0) = 1$ (s. Satz 2.6 und Satz 2.9 (ii)).

Beispiel 4.8. Der Fall $N = 4$ und $l = 3$ erfordert eine gesonderte Betrachtung : Nach Korollar 2.4 gilt $T(q^2) = (q+1)T(1)$ für jede ungerade Primzahl q. Daher gilt (s. Beweis von Satz 4.6)

$$(\tilde{T}(q^2))^2 - \tilde{T}(q^4) = (-(\tfrac{-1}{q})(q+1) + 1 + q)T(1) =$$

$$= (q+1)(1-(\tfrac{-1}{q}))T(1) = \begin{cases} 0 & q \equiv 1 \bmod 4 \\ 2(q+1)T(1) & q \equiv -1 \bmod 4 \end{cases} .$$

Daraus folgert man ähnlich wie oben : Ist $\tilde{T}$ Φ - multiplikativ, so ist $\Phi(m) = \varphi(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$, die nur durch Primzahlen $q \equiv -1 \bmod 4$ teilbar sind. Über den Wert $\Phi(m)$ für andere m kann man zunächst nichts aussagen, denn ist n ungerade und durch eine Primzahl $q \equiv 1 \bmod 4$ teilbar, so gilt $\sum_{d|n} \mu(d)\tilde{T}(n^2d^2)\tilde{T}(\frac{n^2}{d^2}) = 0$.
Es stellt sich nun heraus, daß $\tilde{T}$ Φ - multiplikativ ist für jede Funktion $\Phi : \{ m \in \mathbb{N} \mid m \equiv 1 \bmod 2 \} \longrightarrow \mathbb{C}$ der folgenden Gestalt

$$\Phi(m) = \begin{cases} \varphi(m) & m \text{ hat keinen Primfaktor} \equiv 1 \bmod 4 \\ \text{beliebige komplexe Zahl} & m = q^{2\alpha-1},\ q \text{ prim},\ q \equiv 1 \bmod 4,\ \alpha \in \mathbb{N} \\ -q\Phi(q^{2\alpha-1}) & m = q^{2\alpha},\ q \text{ prim},\ q \equiv 1 \bmod 4,\ \alpha \in \mathbb{N} \\ \prod_{\nu=1}^{r} \Phi(q_\nu^{\alpha_\nu}) & m = \prod_{\nu=1}^{r} q_\nu^{\alpha_\nu};\ q_1, \ldots, q_r \text{ paarweise verschiedene Primzahlen}, \alpha_\nu \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

(Beim Beweis für diese Behauptung benutzt man, daß

$\tilde{T}(q^{2\alpha}) = q^{\alpha}T(1)$ ist für jede Primzahl $q \equiv 1 \bmod 4$ und $\alpha \in \mathbb{N}$; die Gleichung $\Phi(q^{2\alpha}) = -q\,\Phi(q^{2\alpha-1})$ muß erfüllt sein wegen

$$\left[q\,\Phi(q^{2\alpha-1}) + \Phi(q^{2\alpha})\right]\tilde{T}(1) = \Phi(q^{2\alpha-1})\tilde{T}(q^2) + \Phi(q^{2\alpha})\tilde{T}(1) =$$

$$= (\tilde{T}(q^{2\alpha}))^2 - \tilde{T}(q^{2\alpha+2})\tilde{T}(q^{2\alpha-2}) = \sum_{d \mid q^{\alpha}} \mu(d)\tilde{T}(q^{2\alpha}d^2)\tilde{T}\left(\frac{q^{2\alpha}}{d^2}\right) = 0 .$$

Wählt man $\Phi(q^{2\alpha-1}) > 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}$, so gilt offenbar $\Phi(q^2)\,\Phi(q^{\nu}) \neq \Phi(q^{\nu+2})$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$.)

Rankin hat in seiner Arbeit [7] Multiplikationsformeln von folgender Art untersucht :

$$(66) \qquad f(m)f(n) = \sum_{d \mid (m,n)} \Psi(d) f\left(\frac{mn}{d^2}\right) , \quad m, n \in \mathbb{N} ;$$

hier ist Ψ eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in einen Körper F und f eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in den Endomorphismenring End(V) eines Vektorraums V über F. Einer solchen Formel genügen z.B. die Hecke-Operatoren auf dem Raum der Spitzenformen geraden Gewichts -r zur vollen Modulgruppe, wobei $\Psi(d) = d^{r-1}$. Unter der Voraussetzung $f \neq 0$ und $\Psi \neq 0$ erhielt Rankin u.a. die Ergebnisse

1.) $\Psi(1) \neq 0$; nach geeigneter Normierung ist also o.E.d.A. $\Psi(1) = 1$ (Theorem 2);
2.) Ψ ist vollständig multiplikativ und bei vorgegebenem f die einzige Abbildung, die (66) erfüllt (Theorem 4);
3.) ist Ψ vollständig multiplikativ, und sind a_1 und a_p, p Primzahl, Elemente aus End(V), die miteinander kommutieren und für die gilt

$$a_1 a_1 = a_1 \quad , \quad a_1 a_p = a_p \quad ,$$

so gibt es genau eine Ψ - multiplikative Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ mit $f(1) = a_1$ und $f(p) = a_p$ für alle Primzahlen p (Theorem 4).

Folgerung 4.5 und Beispiel 4.8 zeigen, daß sich Rankins zweites Ergebnis nur unter gewissen Voraussetzungen über A auf unseren Fall übertragen läßt;

der Eigenschaft von Ψ , vollständig multiplikativ zu sein, entsprechen bei uns die Eigenschaften von ϕ , die in Folgerung 4.5 (ii) aufgeführt sind.

Im nächsten Beispiel, einer Vereinfachung von 4.8, gebe ich eine ϕ - multiplikative Abbildung A an, wobei ϕ nicht multiplikativ ist.

Beispiel 4.9. Seien $S := R := \mathbb{Z}$; R ist in natürlicher Weise ein S-Linksmodul. Ferner seien p und q zwei verschiedene Primzahlen sowie

$$\mathbb{N}^* := \{ p^\alpha q^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0 \} .$$

Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei

$$A(n^2) := n$$

und

$$\phi(n) := \begin{cases} 1 & n = 1 \\ -m^\alpha & n = m^{2\alpha},\ m \in \{p, q\},\ \alpha \in \mathbb{N} \\ m^{\alpha-1} & n = m^{2\alpha-1},\ m \in \{p, q\},\ \alpha \in \mathbb{N} \\ 0 & pq \mid n \end{cases} .$$

Man prüft leicht nach, daß A ϕ - multiplikativ ist und daß ϕ nicht multiplikativ ist.

Schließlich läßt sich Beispiel 4.9 noch soweit abändern, daß man eine ϕ' - multiplikative Abbildung A erhält, wobei $\phi' \neq 0$, aber $\phi'(1) = 0$ (ϕ' ist dann trivialerweise nicht multiplikativ) :

Beispiel 4.10. Seien $S := \mathbb{Z}$, R die Menge der ganzen Zahlen mit der gewöhnlichen Addition und der trivialen Multiplikation $a * b := 0$ für alle $a, b \in R$; die Operation von S auf R sei die gewöhnliche Multiplikation. Weiter seien $\mathbb{N}^*$ und A wie in 4.9 und für $n \in \mathbb{N}^*$

$$\phi'(n) := \begin{cases} 0 & n = 1 \\ \phi(n) & n > 1 \end{cases} ,$$

ϕ ebenfalls wie in 4.9 . Offenbar leistet dieses Beispiel das Gewünschte; daher läßt sich auch Rankins erstes Ergebnis nicht auf unseren Fall übertragen.

Die Aussage des nächsten Satzes, auf dessen einfachen Beweis ich verzichte, entspricht Rankins drittem Ergebnis.

Satz 4.11. Sei $\Phi : \mathbb{N}^* \longrightarrow S$ eine Abbildung mit $\Phi(1) = 1$ und den Eigenschaften

(i) Φ ist multiplikativ,

(ii) für jede Primzahl $p \in \mathbb{N}^*$ und $\nu \in \mathbb{N}$ ist

$$\Phi(p^{\nu+2}) = \Phi(p^{\nu})\Phi(p^2) \quad .$$

Weiter seien Elemente a_1 und a_p, $p \in \mathbb{N}^*$ prim, des Ringes R gegeben, die miteinander kommutieren, und für die gilt

$$a_1 a_1 = a_1 \quad , \quad a_1 a_p = a_p \quad , \; p \in \mathbb{N}^* \text{prim} \; .$$

Dann gibt es genau eine Φ-multiplikative Abbildung $A : \{ n^2 \mid n \in \mathbb{N}^* \} \longrightarrow R$ mit $A(1) = a_1$ und $A(p^2) = a_p$ für alle Primzahlen $p \in \mathbb{N}^*$.

Das Problem, ob es außer Φ noch andere Funktionen Φ' gibt, die Formel (59) erfüllen, stellt sich in analoger Weise auch für die Multiplikationsformel, die für die Fourierkoeffizienten einer Eigenform aller $T(q^2)$ gilt (s. Satz 1.5). Ich werde ein Folgerung 4.5 (i) entsprechendes Ergebnis beweisen : Falls hinreichend viele Fourierkoeffizienten nicht verschwinden, so ist die Funktion φ_t durch Formel (13) aus Satz 1.5 eindeutig bestimmt (s. Folgerung 4.13).

Seien also $l, N \in \mathbb{N}$, $l \equiv 1 \bmod 2$, $N \equiv 0 \bmod 4$, und $f \in \{ \Gamma_0^o[N], -\frac{l}{2}, \varkappa_1 \}$ sei eine Modulform mit den Fourierkoeffizienten $c(m)$, $m \in \mathbb{N}_o$, wobei $c(t) = 1$ für ein $t \in \mathbb{N}$. Für jede Primzahl q mit $q \nmid tN$ sei f Eigenform von $T(q^2)$. Ferner sei

$$\Phi : \{ n \in \mathbb{N} \mid (n, tN) = 1 \} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine Abbildung mit

$$c(m)c(tn) = \sum_{d \mid (m,n)} \Phi(d) c\left(\frac{mn}{d^2}\right) \tag{67}$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$, die folgenden Bedingungen genügen :

(i) n ist Quadratzahl, $(n,tN) = 1$,

(ii) $(\frac{k(m)}{q}) = (\frac{t}{q})$ für jede Primzahl q mit $q|n$ und $q\nmid k(m)$.

Satz 4.12. Die eben genannten Voraussetzungen seien erfüllt. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $(n,tN) = 1$, und m sei das Produkt aller Primzahlen, die n teilen (für $n = 1$ sei $m := 1$) ; ferner sei $a \in \mathbb{N}$ mit $(a,n) = 1$. Dann gilt

$$(68) \quad \sum_{d|n} \mu(d)c(\frac{amnk(n)}{d^2})c(t\frac{nd^2}{k(n)}) = \mu(k(n))\phi(n)c(am) .$$

Beweis. Es gilt mit (67)

$$1 = c(t)c(t) = \phi(1)c(t) = \phi(1) ,$$

daher ist der Fall $n = 1$ trivial.

Sei jetzt $n > 1$. Für $d \in \mathbb{N}$ mit $d|n$ ist $\frac{nd^2}{k(n)}$ eine zu tN teilerfremde Quadratzahl; im Fall $\mu(d) \neq 0$ gilt $d^2|nk(n)$ und $k(\frac{amnk(n)}{d^2}) = k(am) = mk(a)$. Ist daher q eine Primzahl mit $q\left|\frac{nd^2}{k(n)}\right.$, so folgt $q|n$ und damit $q\left|k(\frac{amnk(n)}{d^2})\right.$. Deshalb läßt sich die Summe auf der linken Seite von Gleichung (68) mit Hilfe von (67) umformen, und es gilt

$$\sum_{d|n} \mu(d)c(\frac{amnk(n)}{d^2})c(t\frac{nd^2}{k(n)}) =$$

$$= \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{s|(\frac{n}{k(n)}d^2, mnk(n)d^{-2})} \phi(s)c(\frac{amn^2}{s^2}) =$$

$$= \sum_{s|mnk(n)} \phi(s) \Big[\sum_{\substack{d^2|\frac{mnk(n)}{s} \\ s|\frac{n}{k(n)}d^2}} \mu(d) \Big] c(\frac{amn^2}{s^2}) .$$

Ich zeige jetzt

$$(69)\quad I(s) := \sum_{\substack{d^2 \mid \frac{mnk(n)}{s} \\ s \mid \frac{n}{k(n)} d^2}} \mu(d) = \begin{cases} \mu(k(n)) & s = n \\ 0 & s \mid mnk(n), s \neq n ; \end{cases}$$

aus (69) folgt offenbar (68) . Es ist

$$I(n) = \sum_{\substack{d^2 \mid mk(n) \\ n \mid \frac{n}{k(n)} d^2}} \mu(d) = \mu(k(n)) \quad ,$$

denn aus $d^2 \mid mk(n)$ folgt $d \mid k(n)$, und aus $n \mid \frac{n}{k(n)} d^2$ folgt $k(n) \mid d$, also $d = k(n)$.

Sei nun s ein Teiler von mnk(n) mit $s \neq n$; ich unterscheide die Fälle $s \nmid n$ und $s \mid n$.

1.) Im Fall $s \nmid n$ gibt es eine Primzahl p mit $n = p^{\alpha} n_1$, $s = p^{\beta} s_1$, wobei $\alpha, \beta, n_1, s_1 \in \mathbb{N}$, $\alpha < \beta$, $p \nmid n_1 s_1$. Wegen $s \mid mnk(n)$ ist $\beta \leq \alpha + 2$, und damit gilt $p^2 \nmid \frac{mnk(n)}{s}$. Aus $d^2 \mid \frac{mnk(n)}{s}$ folgt demnach $p \nmid d$, also $p^{\alpha+1} \nmid \frac{n}{k(n)} d^2$, und deshalb $s \nmid \frac{n}{k(n)} d^2$. Daher erfüllt kein $d \in \mathbb{N}$ die Summationsbedingungen in der Summe I(s) , d.h. $I(s) = 0$.

2.) Im Fall $s \mid n$ gibt es eine Primzahl p mit $n = p^{\alpha} n_1$, $s = p^{\beta} s_1$, wobei $\alpha, n_1, s_1 \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{N}_0$, $\alpha > \beta$, $p \nmid n_1 s_1$. Es sei ferner $m_1 := \frac{m}{p}$; aus der Definition von m folgt $p \nmid m_1$. Es ist $\frac{mnk(n)}{s} = p^{\alpha+1-\beta} k(p^{\alpha}) \frac{m_1 n_1 k(n_1)}{s_1}$. Sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d^2 \mid \frac{mnk(n)}{s}$; es gibt $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ mit $d = d_1 d_2$, $d_1^2 \mid p^{\alpha+1-\beta} k(p^{\alpha})$ und $d_2^2 \mid \frac{m_1 n_1 k(n_1)}{s_1}$. Aus $s \mid \frac{n}{k(n)} d^2$ folgt offenbar $s \mid \frac{n}{k(n)} d_2^2$. Daher gilt

$$I(s) = \Big[\sum_{d_1^2 \mid p^{\alpha+1-\beta} k(p^{\alpha})} \mu(d_1) \Big] \sum_{\substack{d_2^2 \mid \frac{m_1 n_1 k(n_1)}{s_1} \\ s \mid \frac{n}{k(n)} d_2^2}} \mu(d_2) = 0 \quad ,$$

denn wegen $\alpha + 1 - \beta \geq 2$ ist

$$\sum_{d_1^2 \mid p^{\alpha+1-\beta}k(p^\alpha)} \mu(d_1) = \mu(1) + \mu(p) = 0 \quad .$$

Damit ist (69) bewiesen.

Folgerung 4.13. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ mit $(n,tN) = 1$ gebe es ein $a \in \mathbb{N}$ mit $(a,n) = 1$ und $c(am) \neq 0$, wobei m das Produkt aller Primzahlen ist, die n teilen. Aus Satz 1.5 und Satz 4.12 folgt dann $\phi(n) = \varphi_t(n)$, φ_t wie in Definition 1.1 . Insbesondere ist jeweils φ_t die einzige Funktion, die die Multiplikationsformeln für die Darstellungsanzahlen $a_1(m)$ im Fall $1 \in \{3, 5, 7\}$ erfüllt (s. Sätze 2.5 , 2.8 und 2.10) : Es ist $a_5(m) \neq 0$, $a_7(m) \neq 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$; ferner ist $a_3(2m) \neq 0$ für alle ungeraden $m \in \mathbb{N}$, denn 2m ist nicht von der Form $4^\alpha(8\beta+7)$ mit $\alpha , \beta \in \mathbb{N}_0$.

Bemerkung. Mit Satz 4.12 läßt sich ohne Schwierigkeiten Folgendes beweisen : Sind a , m , n wie in Satz 4.12 und ist $n = n_1 n_2$ mit $(n_1, n_2) = 1$, so gilt

$$\left[\phi(n_1 n_2) - \phi(n_1)\,\phi(n_2)\right] c(am) = 0 \quad ;$$

für jede Primzahl q mit $(q,tN) = (q,a) = 1$ und $\nu \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left[\phi(q^{\nu+2}) - \phi(q^\nu)\,\phi(q^2)\right] c(aq) = 0$$

(vergl. Korollar 4.4) . Hieraus erhält man aber keine zusätzlichen Informationen über ϕ , denn im Fall $c(am) \neq 0$, $c(aq) \neq 0$ ist $\phi(n_1 n_2) = \varphi_t(n_1 n_2)$, $\phi(q^{\nu+2}) = \varphi_t(q^{\nu+2})$ (s. Folgerung 4.13) , und die multiplikativen Eigenschaften von φ_t sind bereits bekannt (s. Lemma 1.2) .

Literatur

[1] Dickson, L.E.: History of the Theory of Numbers II. Washington 1920.

[2] Hecke, E.: Mathematische Werke. Göttingen 1970.

[3] Pall, G.: On the number of representations of a square,or a constant times a square,as the sum of an odd number of squares. Journal Lond. Math. Soc. 5, 102-105 (1930).

[4] Petersson, H.: Theorie der automorphen Formen beliebiger reeller Dimension und ihre Darstellung durch eine neue Art Poincaréscher Reihen. Math. Ann. 103, 369-436 (1930).

[5] — Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen I. Math. Ann. 115, 23-67 (1938).

[6] Pfetzer, W.: Die Wirkung der Modulsubstitutionen auf mehrfache Thetareihen zu quadratischen Formen ungerader Variablenzahl. Arch. Math. 4, 448-454 (1953).

[7] Rankin, R.A.: Multiplicative Functions and Operators of Hecke type. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 13, 81-89 (1962),

[8] Schoeneberg, B.: Elliptic Modular Functions. Berlin,Heidelberg,New York 1974.

[9] Shimura, G.: On modular forms of half integral weight. Ann. of Math. (2) 97, 440-481 (1973).

[10] Wohlfahrt, K.: Über Operatoren Heckescher Art bei Modulformen reeller Dimension. Math. Nachr. 16, 233-256 (1957).

Lebenslauf

Am 22.2.1950 wurde ich als erstes Kind des Kaufmanns Gerhard Breden und seiner Ehefrau Elisabeth geb. Buß in Bremerhaven geboren. Bis 1954 lebten wir in Driftsethe/Kreis Wesermünde, dann zogen wir nach Bremerhaven, da mein Vater in den Zolldienst eintrat. Von Ostern 1956 bis Ostern 1960 besuchte ich die Volksschule, anschließend bis zur Reifeprüfung im Sommer 1968 die Humboldtschule in Bremerhaven. Vom Wintersemester 1968 bis zum Sommersemester 1973 studierte ich an der Universität Göttingen Mathematik und Physik. Im April 1970 bestand ich die Vordiplomprüfung, im Februar 1973 die Diplomprüfung in Mathematik. Nach dem Studium leistete ich in Bremerhaven den zivilen Ersatzdienst ab; seit Februar 1975 studiere ich wieder in Göttingen. Während meiner ersten Studienzeit war ich Stipendiat der Studienstiftung des deutschen Volkes, von der ich zur Zeit auch ein Promotionsstipendium erhalte. Für die wissenschaftliche Betreuung und Anregung zu meiner Arbeit bin ich Herrn Professor Maak zu großem Dank verpflichtet.

Heinz-Gerhard Breden